

$n=1$, dinamica banale: o si raggiunge l'equilibrio o si tende all'infinito.

Cos'è interessante nei sistemi **MONODIMENSIONALI**? La **DIPENDENZA DAI PARAMETRI**.

I punti fissi possono cambiare o può cambiare la loro stabilità, in seguito a **BIFORCAZIONI** che avvengono per certi valori dei parametri che sono chiamati **PUNTI DI BIFORCAZIONE**.



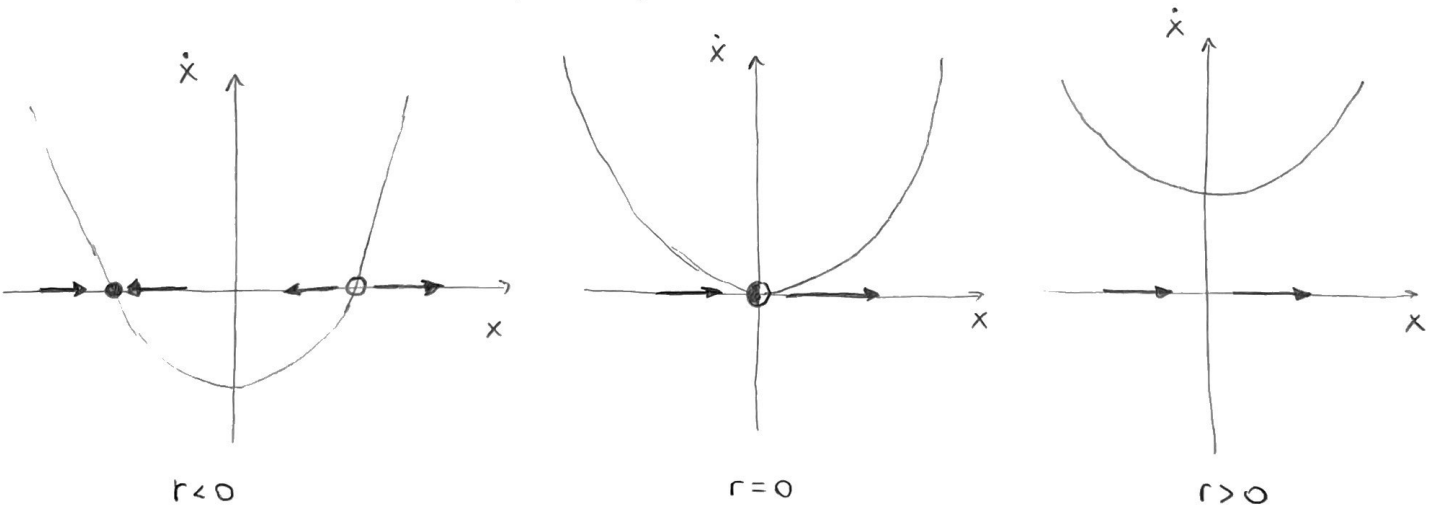
in funzione di un **PARAMETRO DI CONTROLLO**

ES. (vizio) del bastoncino che si piega.

BIFORCAZIONE A NODO SELLA

È il meccanismo di base con cui punti fissi sono nati o distrutti.

$$\dot{x} = r + x^2$$

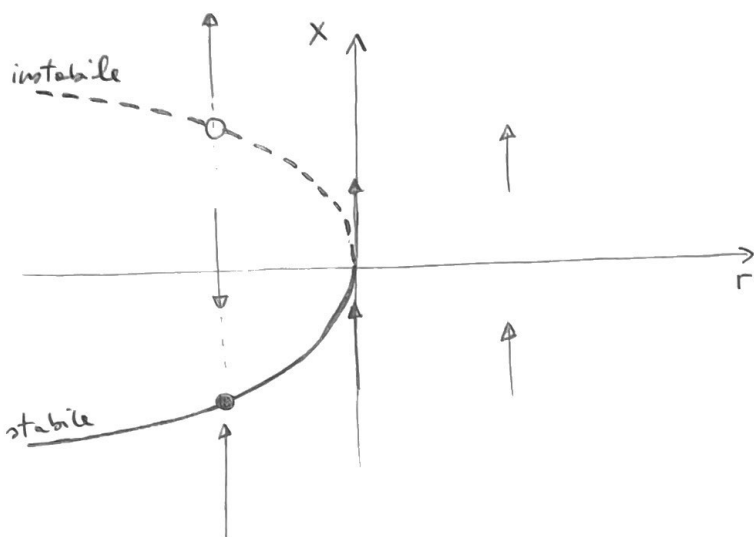


↑

le biforcazioni
avvengono qui

perché i campi vettoriali per $r < 0$ e $r > 0$ sono qualitativamente diversi.

• DIAGRAMMA DI BIFORCAZIONE



$$\dot{x} = r + x^2$$

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow r = -x^2$$

"biforcazione":

divisione in due rami

ES. Analisi di stabilità lineare

$$\dot{x} = r - x^2, \quad f(x) = r - x^2$$

altro modo di vedere la biforcazione

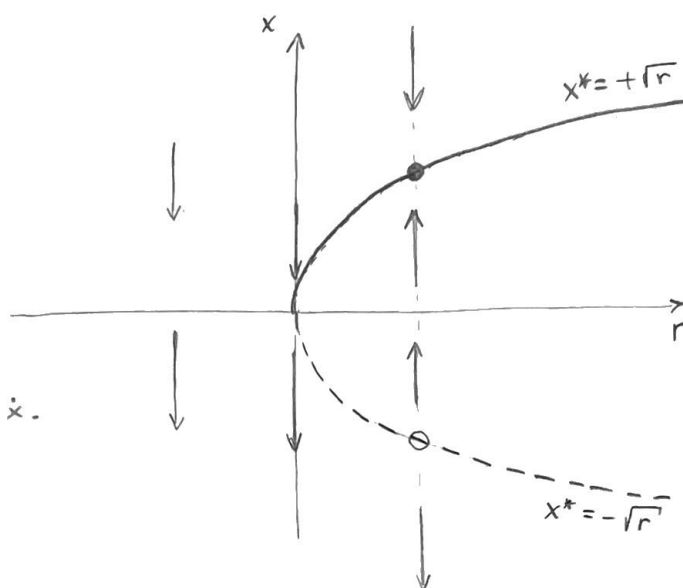
$$f'(x) = -2x$$

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow x^* = \pm\sqrt{r}$$

$r > 0$ due punti fissi

$r < 0$ nessun punto fisso

si può passare a $\dot{x} = r + x^2$ cambiando il segno di r e $\dot{x}$.



$$f'(+\sqrt{r}) = -2\sqrt{r} < 0 \quad \text{stabile}$$

$$f'(-\sqrt{r}) = 2\sqrt{r} > 0 \quad \text{instabile}$$

$$r = 0 \Rightarrow f'(x^*) = 0$$

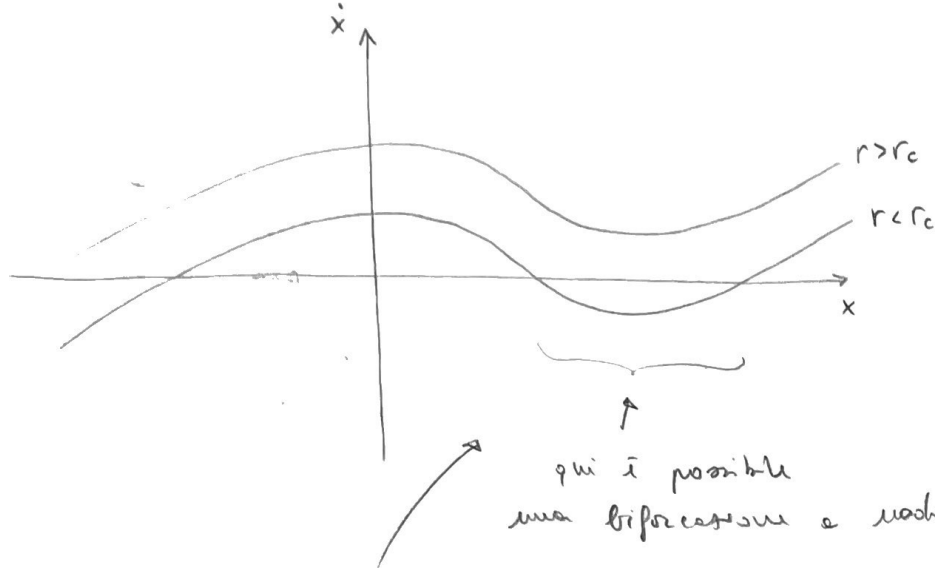
la linearizzazione scompare quando i punti fissi si fondono.

• FORME NORMALI

$\dot{x} = r - x^2$, $\dot{x} = r + x^2$ rappresentano, in un certo senso, tutte le biforcazioni a nodo sella.

oss. Vicino a una biforcazione a nodo sella la dinamica assomiglia sempre a uno di questi due sistemi.

Come possono due punti fissi di $\dot{x} = f(x)$ collidere e sparire variando un parametro di controllo r ?



effettivamente,
 qui $f(x)$ si può approssimare
 con una parabola

qui è possibile
 una biforcazione a nodo sella: serve una $f(x)$ che
 localmente si assomigli
 a una parabola.

Analiticamente,

$$\dot{x} = f(x, r) \quad \text{vicino la biforcazione a } x = x^* \text{ e } r = r_c$$

Espandendo in serie di Taylor

$$\dot{x} = f(x, r) = f(x^*, r_c) + (x - x^*) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*, r_c} + (r - r_c) \left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{x^*, r_c} + \frac{1}{2} (x - x^*)^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x^*, r_c} + \dots$$

$$f(x^*, r_c) = 0 \quad \text{perché } x^* \text{ è un punto fisso}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*, r_c} = 0 \quad \text{per la condizione di tangente (tangente orizzontale)} \\ \text{di una biforcazione a nodo sella.}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = a(r - r_c) + b(x - x^*)^2 + \dots$$

$$\text{con } a = \left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{x^*, r_c}, \quad b = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x^*, r_c}, \quad a, b \neq 0$$

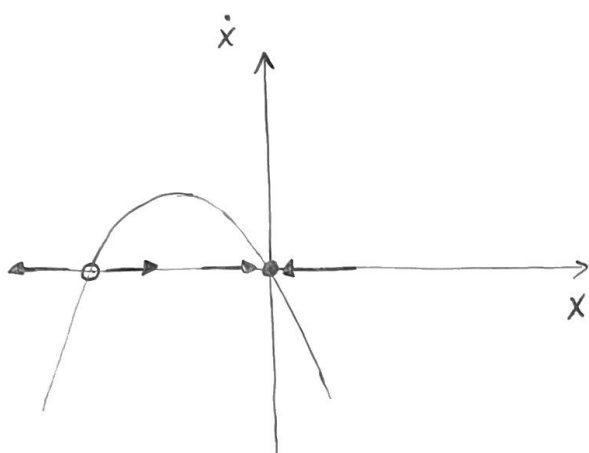
compatibili con le FORME NORMALI $\dot{x} = r - x^2$, $\dot{x} = r + x^2$
 delle biforcazioni a nodo sella.

BIFORCAZIONE TRANSCRITICA

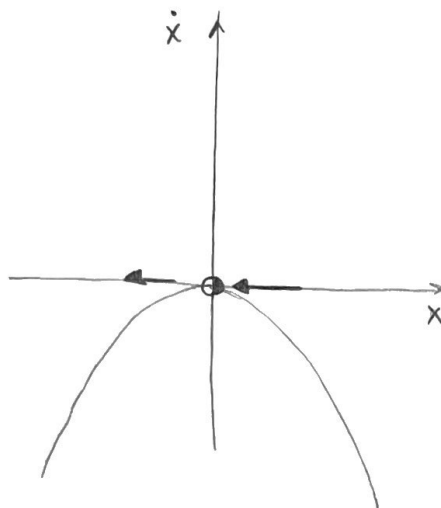
Un punto fisso esiste sempre ma cambia la sua stabilità.

$$\dot{x} = rx - x^2$$

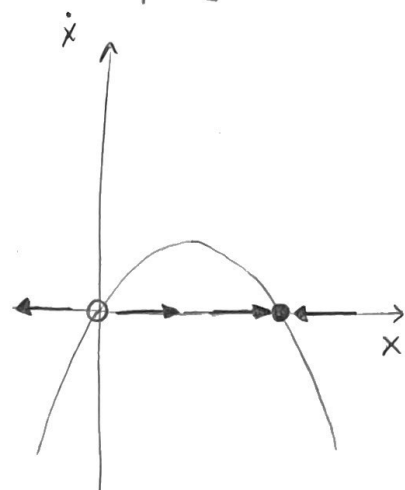
oss. somigliante con l'equazione logistica, ma più generale



$r < 0$



$r = 0$

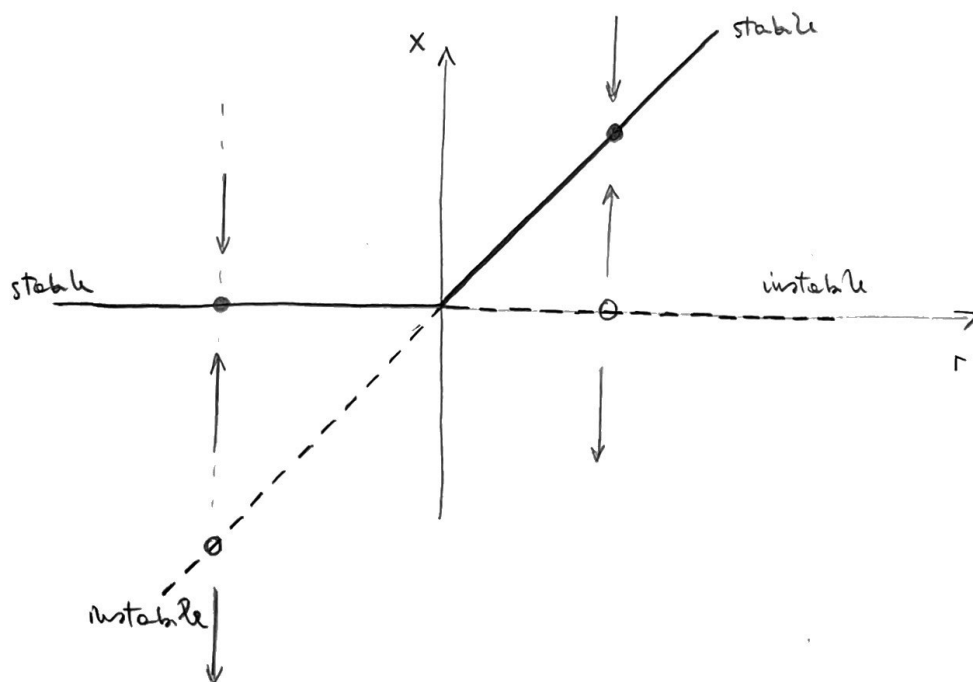


$r > 0$

$$\dot{x} = x(r - x)$$

oss. C'è almeno un punto fisso $x^* \forall r$

Differente con la biforcazione a nodo selle ^{qui} $\checkmark$; due punti non scompaiono alla biforcazione, ma si scambiano la loro stabilità.



Anche $\dot{x} = rx + x^2$ è una forma normale di biforcazione transcritica, ma con grafico diverso (parabola con concavità rivolta verso l'alto).

Oss. Si può passare da una all'altra cambiando il segno di r e $\dot{x}$.

ES. Il sistema del primo ordine $\dot{x} = x(1-x^2) - a(1-e^{-bx})$ esibisce una biforcazione transcritica?

$x^* = 0$ è un punto fisso $\forall (a, b)$, cosa che lo rende un buon candidato per biforcarsi.

Per $x \ll 1$, $1 - e^{-bx} \stackrel{\text{Taylor}}{=} 1 - \left(1 - bx + \frac{1}{2} b^2 x^2 + O(x^3)\right) =$
 $= bx - \frac{1}{2} b^2 x^2 + O(x^3)$

$$\Rightarrow \dot{x} = x - a \left(bx - \frac{1}{2} b^2 x^2 + O(x^3) \right) =$$
$$= (1 - ab)x + \frac{1}{2} ab^2 x^2 + O(x^3)$$

$$\dot{x} = (1 - ab)x + \frac{1}{2} ab^2 x^2; \quad \underbrace{\frac{2}{ab^2} \dot{x}}_{\substack{\text{risale e cambia} \\ \text{di segno la velocità}}} = \underbrace{\frac{2(1-ab)}{ab^2}}_r x + x^2 \quad \text{della forma } \dot{x} = rx + x^2$$

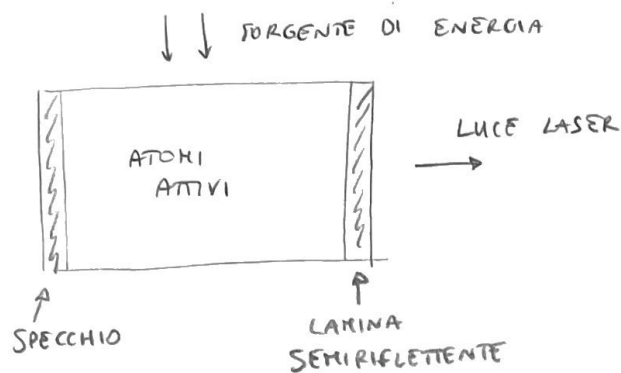
$\Rightarrow$ quando $ab = 1$ avviene una biforcazione transcritica.

Inoltre $\frac{2}{ab^2} \dot{x} = x \left(\frac{2(1-ab)}{ab^2} + x \right) \Rightarrow$ altro punto fisso in
 $x^* \approx - \frac{2(1-ab)}{ab^2}$

NOTA Valido per $x \ll 1$, quindi $ab \approx 1$, cioè in prossimità delle biforcazioni.

- La teoria delle forme normali ci garantisce che possiamo sempre trovare una forma canonica (tramite sviluppi in serie, cambi di variabile, ...). In questo caso la forma canonica era $\dot{x} = rx - x^2$, biforcazione transcritica.

ESEMPIO FISICO : SOGLIA DEL LASER (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation)



- sorgente e bene energia
→ il sistema si comporta come una lampada; gli atomi, eccitati, emettono luce in maniera casuale

- al di sopra di una certa energia della sorgente gli atomi cominciano a oscillare in fase → laser, luce più intensa e coerente

è un fenomeno di auto-organizzazione del sistema.

Si potrebbe dire che gli atomi cooperano.

$n(t)$ numero di fotoni nel campo del laser (fotoni coerenti)

$\dot{n}$ = guadagno - perdita

$$= G n N - k n$$

↑
emissione
stimolata

↑ fuga dei fotoni dai lati
del laser

$N(t)$ numero
di atomi eccitati

$$\tau = \frac{1}{k}$$

tempo di vite

tipico di un fotone nel laser

$G > 0$ coefficiente
di guadagno

- Idea fisica chiave: dopo che un atomo eccitato emette un fotone, ricade ad un livello di energia inferiore, non eccitato.

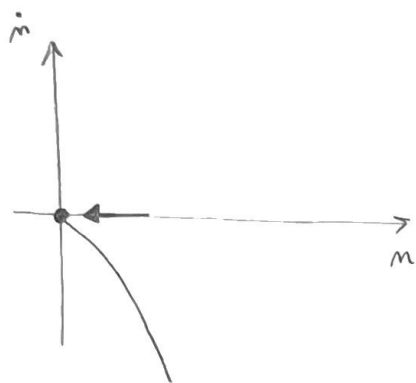
$$\Rightarrow N(t) = N_0 - \alpha n$$

↑
numero
di atomi
eccitati in
cavità di
riflettore laser

$\alpha > 0$ è il rate a cui gli atomi ritornano allo stato fondamentale

$$\Rightarrow \dot{m} = Gm(N_0 - \alpha m) - km = (GN_0 - k)m - \alpha Gm^2$$

sistema del 1° ordine per $m(t)$

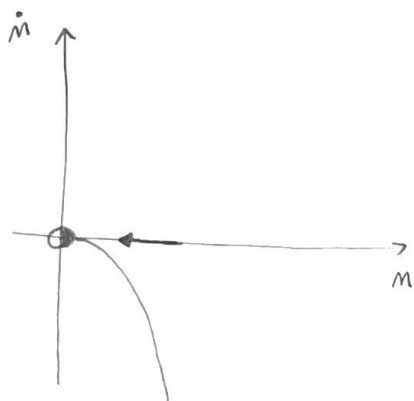


$$GN_0 - k < 0$$

$$N_0 < \frac{k}{G}$$

$m^* = 0$ stabile

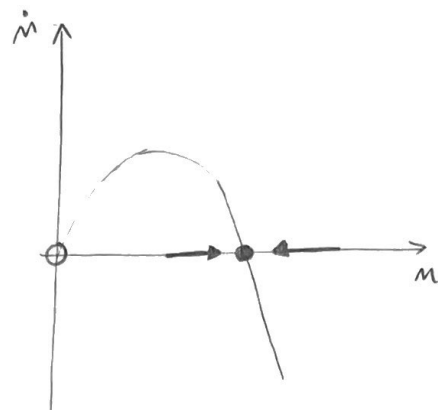
non c'è emissione stimolata,
il laser agisce come una
lampada



$$N_0 = \frac{k}{G}$$

qui avviene la
biforcazione transcritica,
aumentando N_0

↑
SOGLIA
DEL
LASER
 $N_0 = \frac{k}{G}$

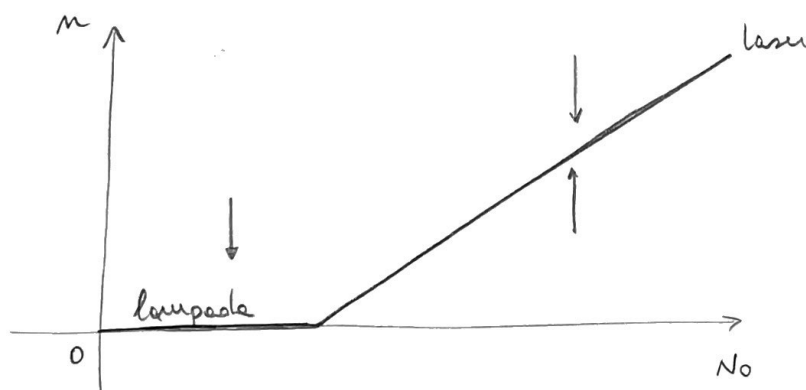


$$N_0 > \frac{k}{G}$$

l'origine non è più stabile

$$\dot{m} = m(GN_0 - k - \alpha Gm)$$

$$m^* = \frac{GN_0 - k}{\alpha G}$$



note: è un modello molto semplificato che ignora diversi fenomeni
fisici come la dinamica degli atomi eccitati e l'emissione
spontanea.

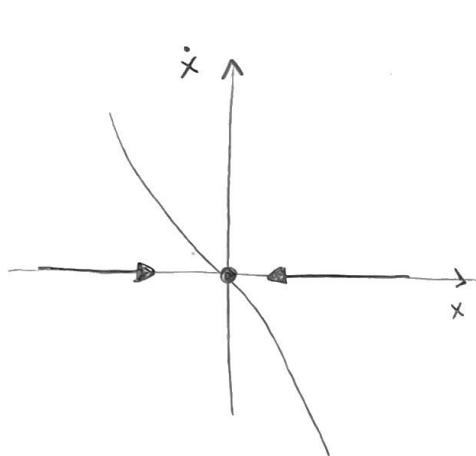
BIFORCAZIONE A FORCONE

Tipica di problemi con simmetria. Esempio del bastoncino verticale che, sotto l'effetto di un peso, si piega o a destra o a sinistra.

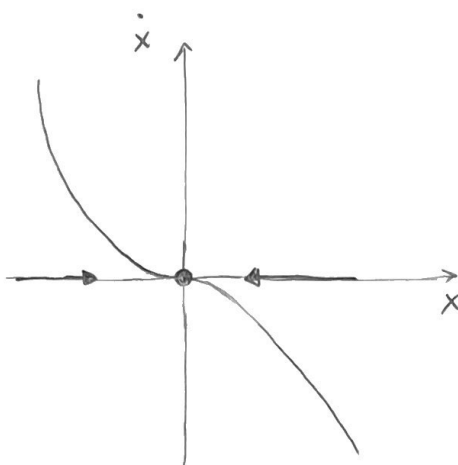
Ci sono due tipi di biforcazioni a forcone: supercritiche e subcritiche. I punti fissi tendono ad apparire e sparire come coppie simmetriche.

• Biforcazione a forcone SUPERCRITICA

$\dot{x} = rx - x^3$ forma normale, invariante per scambio $x \rightarrow -x$ (simmetria)



$r < 0$

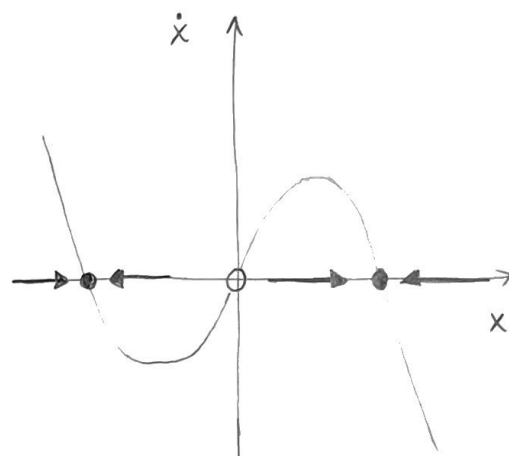


$r = 0$

Qui

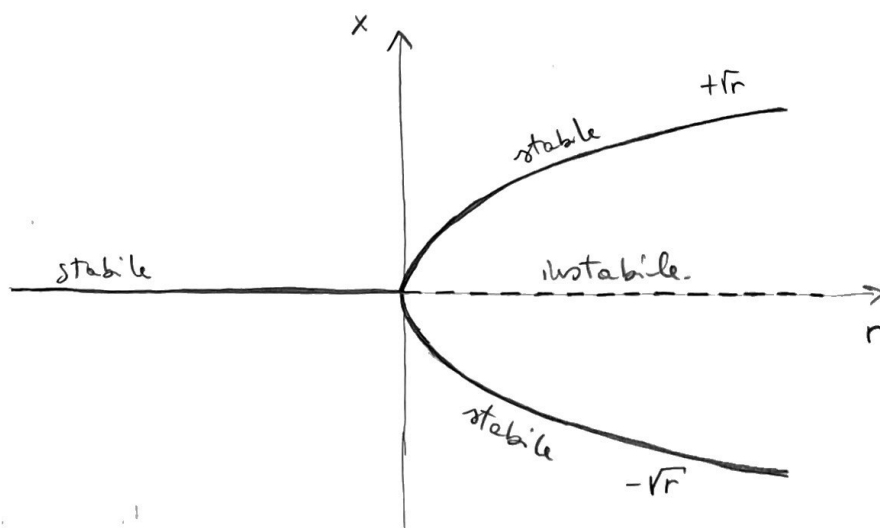
x^* è stabile, ma debolmente.

Le soluzioni non decadono più esponenzialmente e si parla di RALLENTAMENTO CRITICO.



$r > 0$

$x^* = \pm \sqrt{r}$



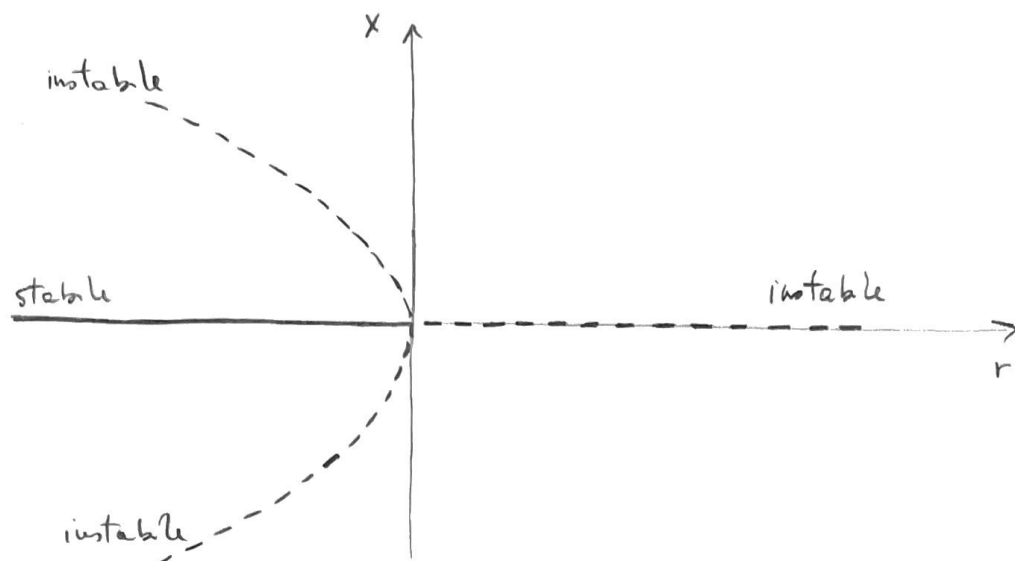
oss. In $\dot{x} = rx - x^3$ il termine $-x^3$ è stabilizzante, agisce come una forza di richiamo che "tira indietro" $x(t)$ verso $x=0$.

ES. (live) INSTABILITÀ DI FARADAY, ROTTURA DI SIMMETRIA di BOWEN e WALKER

• Biforcazione a forcone SUBCRITICA

Con il termine cubico destabilizzante

$$\dot{x} = rx + x^3$$



$$x^* = \pm \sqrt{r}$$

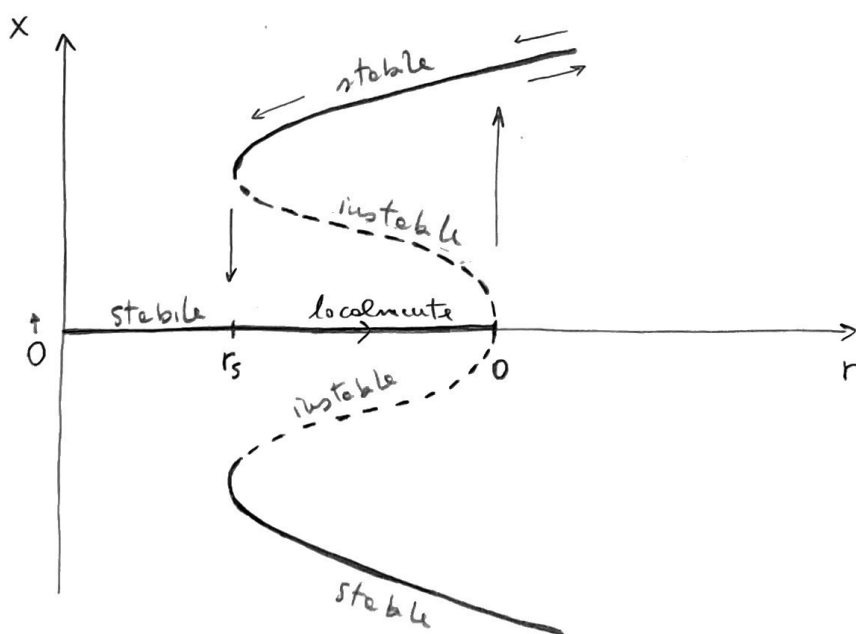
instabili

In sistemi fisici reali, un'instabilità con "esplosione" è solitamente compensata da termini di ordine superiore.

Volendo mantenere la simmetria $x \rightarrow -x$, il nuovo sistema sarà

$$\dot{x} = rx + x^3 - x^5$$

NOTA: Non si perde generalità assumendo che i coefficienti di x^3 e $-x^5$ siano entrambi 1. (si può dimostrare)



Per x piccolo, il grafico assomiglia a quello di $\dot{x} = rx + x^3$

Per un $r_s < 0$, i rami instabili curvano e diventano stabili. Questi rami stabili esistono per ogni $r > r_s$ e per GRANDI "AMPIETÀ" x .

(tre)
1. Nell'intervallo $r_5 < r < 0$ COESISTONO due stati stabili qualitativamente diversi. È la condizione iniziale x_0 che determina ^{su} quale punto fisso si attenderà il sistema per $t \rightarrow \infty$.

L'origine è stabile alle piccole perturbazioni, ma non alle grandi. Si dice che è LOCALMENTE STABILE.

2. La coesistenza di diversi stati stabili permette che esistano SALT e ISTERESI, al variare di r .

↑
irreversibilità al variare di r .

3. La biforcazione a $r = r_5$ è una biforcazione a nodo sella, poiché punti fissi stabili e instabili sono creati "improvvisamente".

OSS. La biforcazione a forcone supercritica è legata alle transizioni di fase del secondo ordine in meccanica statistica.
(continue)

La biforcazione a forcone subcritica è legata alle transizioni di fase discontinue o del primo ordine.

Esercizi per casa.

BIFORCAZIONI A FORCONE

1) $\dot{x} = rx + x^3$, $r > 0$ fissato. Mostare che $x(t) \rightarrow \pm\infty$ in un tempo finito, partendo da qualsiasi condizione iniziale $x_0 \neq 0$.

2) $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$

a) Trovare le espressioni algebriche per i punti fissi al variare di r .

b) Disegnare i campi vettoriali al variare di r , facendo emergere tutti i punti fissi e la loro stabilità.

c) Calcolare l' $r = r_s$ per cui i punti fissi $x^* \neq 0$ emergono in conseguenza di una biforcazione a nodo sella.

3) Transizione di fase del 1° ordine.

Consideriamo il potenziale $V(x)$ del sistema $\dot{x} = rx + x^3 - x^5$.

Calcolare r_c / $V(x)$ abbia tre valli di uguale profondità.