

LEZIONE 4 | FLUSSI BIDIMENSIONALI

SISTEMI LINEARI (cap. 5 del libro) 4/11/2025

7/11/2024

Studiamo innanzitutto i SISTEMI LINEARI (in 2 dimensioni)

perché giocano un ruolo importante nella CLASSIFICAZIONE DEI PUNTI FISSI dei SISTEMI NON LINEARI.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned} \quad , \quad \underline{\dot{x}} = A \underline{x} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad e \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Il sistema è detto LINEARE nel senso che se $\underline{x}_1$ e $\underline{x}_2$ sono soluzioni allora qualsiasi combinazione lineare di esse $C_1 \underline{x}_1 + C_2 \underline{x}_2$ è soluzione.

NOTA. $\underline{\dot{x}} = 0$ quando $\underline{x} = 0$, quindi $\underline{x}^* = 0$ è sempre un punto fisso $\forall A$.

Le soluzioni del sistema possono essere visualizzate come traiettorie nel piano (x, y) , che chiamiamo PIANO DI FASE (o DELLE FASI)

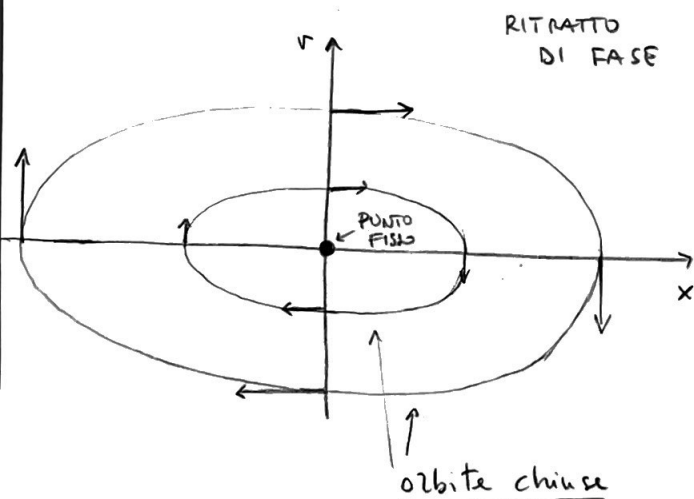
ES $m\ddot{x} + kx = 0$ può essere risolto analiticamente (i sistemi lineari sono speciali in questo senso) ma ci eserciteremo su di esso in termini di piano di fase.

Lo stato del sistema è determinato da $(x, \dot{x}) = (x, v)$. Quindi lo scriviamo

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

Questo sistema assegna un vettore $(\dot{x}, \dot{v}) = (v, -\omega^2 x)$ ad ogni punto (x, v) , quindi rappresenta un campo vettoriale nel piano di fase.



Anche qui, è più utile che nel caso monodimensionale, visualizziamo il campo vettoriale come il moto di un fluido immaginario.

Poniamo una particella immaginaria in (x_0, v_0) e vediamo come è trascinata dal flusso.
 punto di fase

Le orbite chiuse sono ellissi date dall'equazione $\omega^2 x^2 + v^2 = C$, $C \geq 0$ risultato equivalente alla conservazione dell'energia

$$\frac{k}{m} x^2 + v^2 = C, \quad \frac{k}{2} x^2 + \frac{mv^2}{2} = C' \quad \checkmark$$

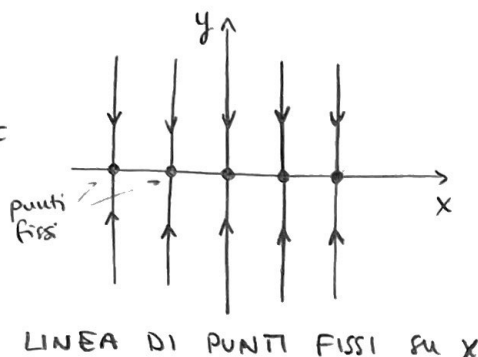
ES Risolviamo il sistema lineare $\dot{x} = Ax$ con $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e disegniamo il ritratto di fase.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \dot{x} &= ax \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \quad \text{equazioni disaccoppiate}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{at} \\ y(t) &= y_0 e^{-t} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\rightarrow \text{esponenziale dipendente dal valore di } a \\ &\rightarrow \text{decadimento esponenziale} \end{aligned}$$

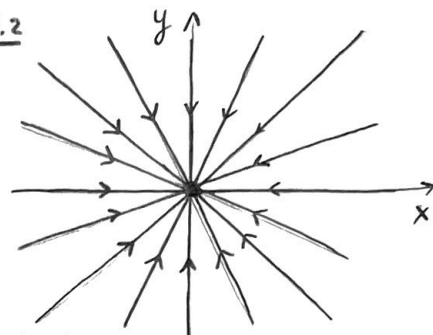
$a = 0$ GRAF.1

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \\ y(t) &= y_0 e^{-t} \\ \dot{x} &= 0 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned}$$

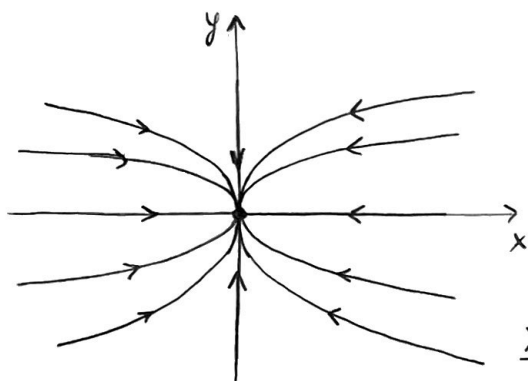


$a = -1$ GRAF.2

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{-t} \\ y(t) &= y_0 e^{-t} \\ \dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= -y \\ y &= \frac{y_0}{x_0} x \end{aligned}$$



$a < -1$ GRAF.3



pendente $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{1}{a} \frac{y(t)}{x(t)} = -\frac{1}{a} \frac{y_0 e^{-t}}{x_0 e^{at}} = -\frac{1}{a} \frac{y_0}{x_0} e^{-(1+a)t}$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ a < -1}} \frac{dy}{dx} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow -\infty \\ a < -1}} \frac{dy}{dx} = 0$$

le traiettorie si avvicinano all'origine tangenzialmente alle direzioni "lente" y

NOTA Equazione cartesiana delle traiettorie

$$\frac{x}{x_0} = e^{at}; \quad \frac{1}{a} \ln \left(\frac{x}{x_0} \right) = t \quad \rightarrow \quad y = y_0 e^{-\frac{1}{a} \ln \left(\frac{x}{x_0} \right)} = y_0 e^{\ln \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-1/a}} = y_0 \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-1/a} \checkmark$$

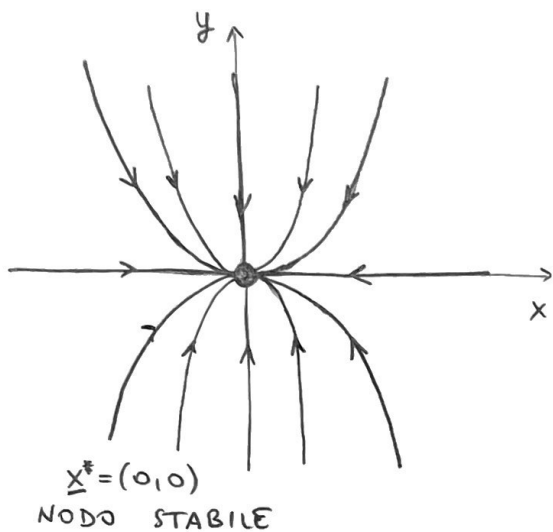
x e x_0 hanno sempre lo stesso segno per cui è posto il problema

per $a = -1$ $y = \frac{y_0}{x_0} x$

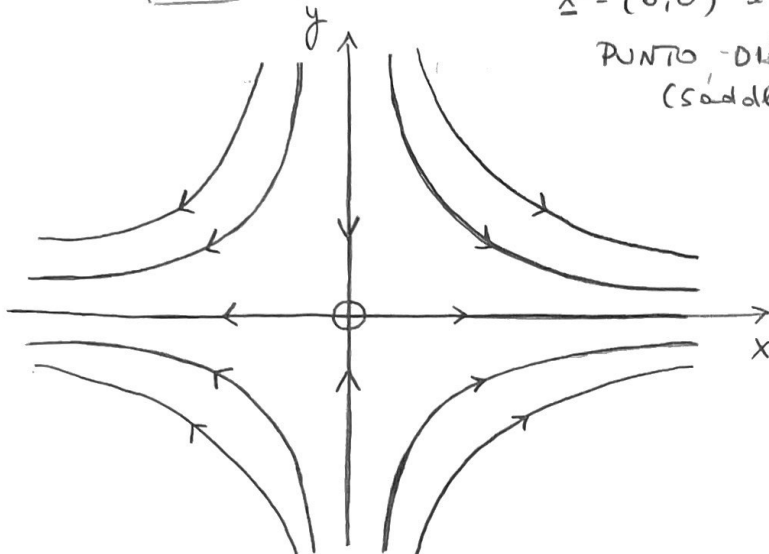
ESERCIZIO PER CASA:

continuare sviluppando più casi possibili.

$-1 < a < 0$ GRAF. 4



$a > 0$ GRAF. 5



$\underline{x}^* = (0,0)$ è un
PUNTO DI SELLA
(Saddle point)

equazione caratteristica $y = y_0 \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-\frac{1}{a}} = y_0 \sqrt[a]{\frac{x_0}{x}}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = +\infty$

l'asse y è una VARIETÀ STABILE del punto
 $\{ \underline{x}_0 / \underline{x}(t) \rightarrow \underline{x}^* \text{ per } t \rightarrow \infty \}$ di sella $\underline{x}^*$

l'asse x è una VARIETÀ INSTABILE del punto
di sella $\underline{x}^*$

$\{ \underline{x}_0 / \underline{x}(t) \rightarrow \underline{x}^* \text{ per } t \rightarrow -\infty \}$

NOMENCLATURA

• $\underline{x}^* = \underline{0}$ è un PUNTO FISSO GLOBALMENTE ATTRATTIVO per $-\infty < a < 0$ (GRAF. 2,3,4)
 ↳ perché attrae TUTTE le traiettorie,
 cioè $\underline{x}(t) \rightarrow \underline{x}^*$ per $t \rightarrow \infty$

• $\underline{x}^* = \underline{0}$ è STABILE SECONDO LYAPUNOV se tutte le traiettorie che iniziano vicino $\underline{x}^*$ restano vicino $\underline{x}^*$ $\forall t$. $-\infty < a \leq 0$ (GRAF. 1,2,3,4)

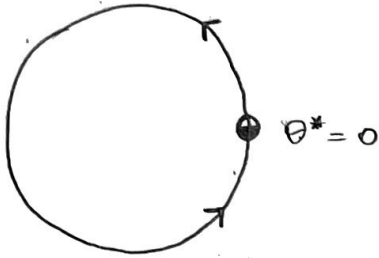
• Quando un punto è stabile secondo Lyapunov ma non attrattivo
 ($\underline{x}^* = \underline{0}$ in GRAF. 1) è detto NEUTRALMENTE STABILE.

ALTRO ES. $\underline{x}^* = (0,0)$ per l'oscillatore armonico semplice.

NOTA. In meccanica la stabilità neutrale s'incontra spesso per sistemi senza attrito.

oss. Un punto fisso può essere attrattivo ma non stabile secondo Lyapunov.
 Nessuna delle due nozioni di stabilità implica l'altra.

es. $\dot{\theta} = 1 - \cos \theta$



$\theta^* = 0$ è ATTRATTIVO perché attrae tutte le traiettorie, per $t \rightarrow \infty$, ma non stabile secondo Lyapunov perché partendo vicino θ^* ci si può allontanare parecchio prima di ritornarvi.

Tuttavia nella maggior parte dei casi i due tipi di stabilità coesistono.

- Quando un punto fisso è attrattivo e stabile secondo Lyapunov si dice STABILE (o ASINTOTICAMENTE STABILE)
- Quando un punto fisso non è attrattivo né stabile secondo Lyapunov si dice INSTABILE ($\underline{x^* = 0}$ in GRAF. 5)

CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI LINEARI

Studiamo il caso di una matrice A generale.

Nell'esempio precedente notiamo come gli assi x e y abbiano giocato un ruolo geometricamente importante, poiché di fatto hanno determinato la direzione delle traiettorie per $t \rightarrow \pm \infty$.

Inoltre gli assi contenevano delle traiettorie rettilinee "speciali", nel senso che una traiettoria che cominciava su uno degli assi resterebbe su di esso esibendo una crescita (o decrescita) esponenziale semplice.

Vogliamo cercare l'analogo di queste traiettorie rettilinee ma per il caso generale, per cui cerchiamo traiettorie della forma:

$$\underline{x}(t) = e^{\lambda t} \underline{v}, \quad \text{con } \underline{v} \neq \underline{0} \text{ da determinare}$$

λ tasso di crescita,
da determinare.

se una soluzione di questo tipo esiste, essa corrisponde a un moto esponenziale lungo la retta in direzione di $\underline{v}$.

Procediamo:

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x}; \quad \lambda e^{\lambda t} \underline{v} = e^{\lambda t} A \underline{v}; \quad A \underline{v} = \lambda \underline{v}$$

che ci dice che le soluzioni rettilinee esistono se $\underline{v}$ è un autovettore di A con autovalore corrispondente λ .

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \text{equazione caratteristica, con } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$$

$$\text{dove } \tau = \text{tr} A = a + d \\ \Delta = \det A = ad - bc$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ allora $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti e generano l'intero piano, cioè ogni condizione iniziale può essere scritta come

$$\underline{x}_0 = C_1 \underline{v}_1 + C_2 \underline{v}_2$$

A questo punto possiamo scrivere la soluzione generale

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{v}_2$$

che è generale perché è una combinazione lineare di soluzioni di $\dot{\underline{x}} = A \underline{x}$ (quindi esse stesse soluzioni), inoltre soddisfa le condizioni iniziali $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ e quindi è la soluzione unica per il teorema di esistenza e unicità.

ES. Ritratto di fase di $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 4x - 2y \end{cases}$ con condizioni iniziali $(x_0, y_0) = (2, -3)$

Il sistema si può risolvere ottenendo

$$x(t) = e^{2t} + e^{-3t}$$

$$y(t) = e^{2t} - 4e^{-3t}$$

ma questo non è necessario per disegnare il ritratto di fase.

Invece calcoliamo gli autovalori. $\tau = \text{tr} A = -1$, $\Delta = -6$

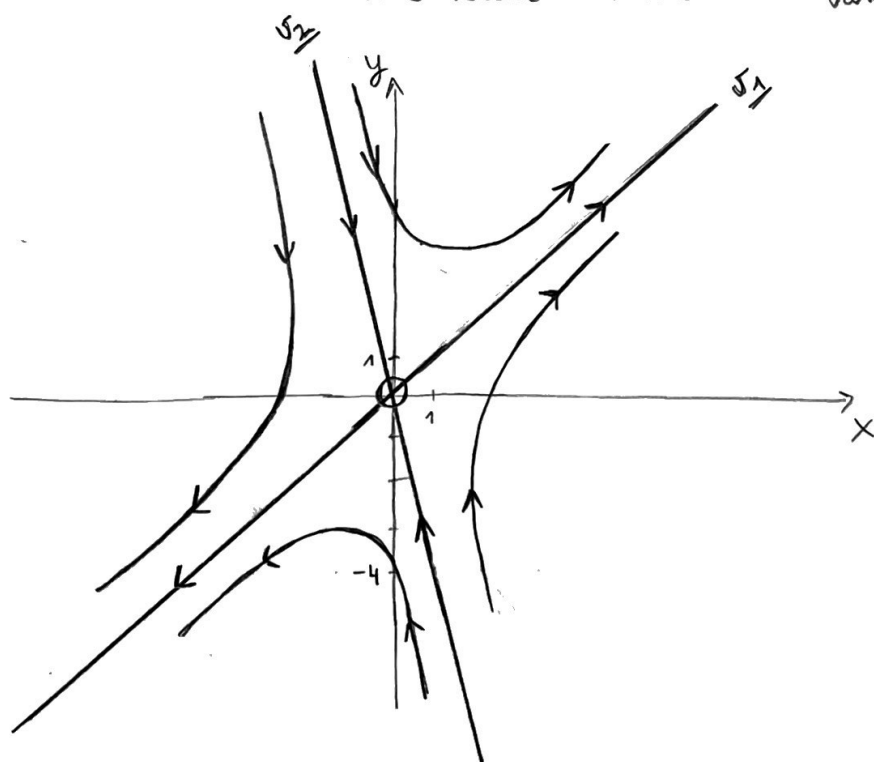
$$\Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$$

Questo ci dice che la prima autosoluzione cresce esponenzialmente, mentre la seconda decresce esponenzialmente. $\Rightarrow$ L'origine è un PUNTO DI SELL.

Calcoliamo gli autovettori $\underline{v}_1 = (1, 1)$, $\underline{v}_2 = (1, -4)$

↑
genera
una varietà instabile

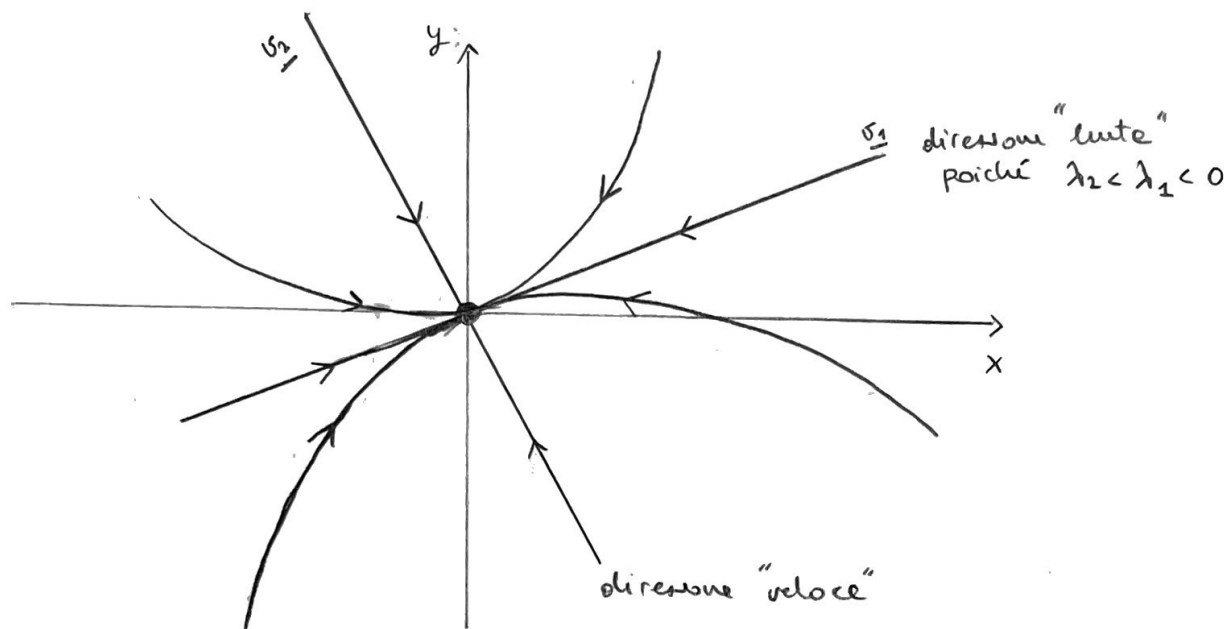
↑
genera una
varietà stabile



ES. Disegniamo un ritratto di fase tipico per $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$.

Le due soluzioni decadono esponenzialmente, per cui il punto fisso è un modo stabile.

Da un esempio precedente ci ricordiamo che le traiettorie tipicamente si avvicinano all'origine tangenzialmente alla direzione "lenta", quella corrispondente al più piccolo $|\lambda|$. In questo caso v_1 . Per $t \rightarrow -\infty$, invece, le traiettorie diventano parallele alla direzione "veloce".



oss. Per $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ o invertendo le direzioni delle frecce avremmo un modo instabile.

• CASO DEGLI AUTOVALORI COMPLESSI

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta} \right) \text{ complessi se } \tau^2 - 4\Delta < 0$$

riscriviamoli come $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$, con $\alpha = \frac{\tau}{2}$, $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4\Delta - \tau^2}$

Assumiamo $\omega \neq 0$, o, equivalentemente, per avere autovalori distinti.

La soluzione si può scrivere:

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{v}_2$$

con $c_1, c_2, \underline{v}_1, \underline{v}_2$ complessi

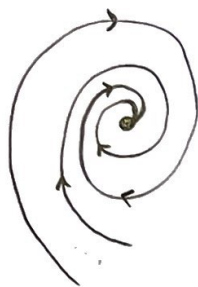
$\Rightarrow \underline{x}(t)$ è data da combinazioni lineari di $e^{(\alpha \pm i\omega)t}$.

Dalla formula di Eulero $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$, quindi

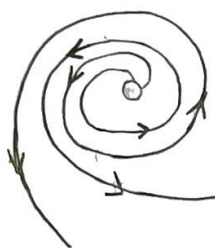
$\underline{x}(t)$ è data da combinazioni di termini del tipo $e^{\alpha t} \cos \omega t$ e $e^{\alpha t} \sin \omega t$

Se $\alpha = \operatorname{Re}(\lambda) < 0$ il termine rappresenta oscillazioni che decadono esponenzialmente. Se $\alpha = \operatorname{Re}(\lambda) > 0$ il termine rappresenta oscillazioni che crescono esponenzialmente.

I punti fissi corrispondenti sono ^{rispettivamente} SPIRALI STABILI o INSTABILI.

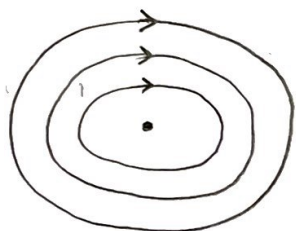


SPIRALE STABILE



SPIRALE INSTABILE

Se $\alpha = 0$ (autovalori immaginari), le soluzioni sono periodiche con periodo $T = 2\pi/\omega$. Il punto fisso corrispondente è un CENTRO.



come nel caso dell'oscillatore armonico.

• CASO DI DUE AUTOVALORI UGUALI $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Due possibilità: 1) Ci sono due autovettori indipendenti corrispondenti a λ
2) C'è un solo autovettore

$$1) \underline{x}_0 = c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2, \quad A \underline{x}_0 = A(c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2) = c_1 \lambda \underline{v}_1 + c_2 \lambda \underline{v}_2 = \lambda \underline{x}_0$$

$\Rightarrow$ ogni vettore del piano è autovettore con autovalore λ ,

poiché moltiplicare per A non fa che "dilatere" qualsiasi vettore di un fattore λ ,

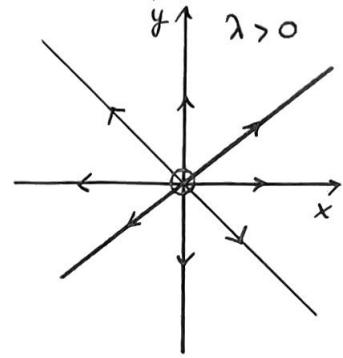
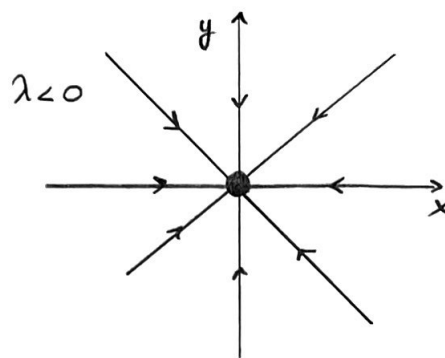
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Quindi se $\lambda \neq 0$ tutte le traiettorie sono rette che passano per l'origine

$$\underline{x}(t) = e^{\lambda t} \underline{x}_0$$

e il punto fisso

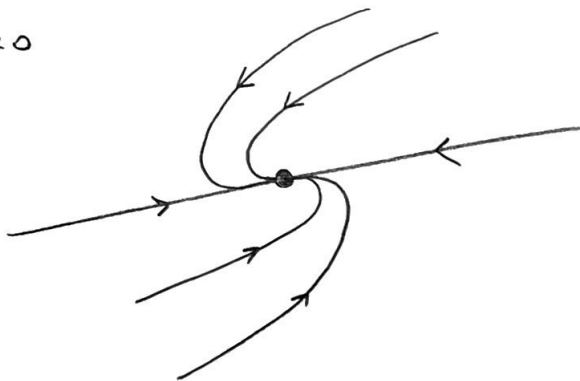
è un NODO A STELLA.



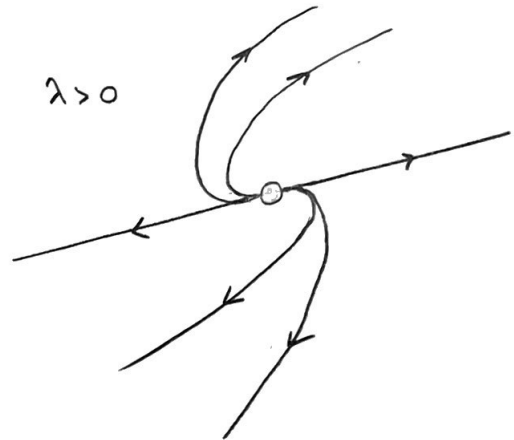
2) In questo caso il punto fisso è un NODO DEGENERE.

Per $t \rightarrow \pm \infty$ tutte le traiettorie diventano parallele all'unico autovettore.

$\lambda < 0$



$\lambda > 0$



Un NODO DEGENERE si può immaginare come ottenuto deformando un nodo ordinario, oppure come caso alle frontiere tra una spirale e un nodo.

Disegno grafico di classificazione dei punti fissi nel piano (τ, Δ) .

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta} \right), \quad \Delta = \lambda_1 \lambda_2, \quad \tau = \lambda_1 + \lambda_2$$

poiché l'equazione caratteristica $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$

$$\text{si può scrivere } (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$$

- $\Delta < 0$, autovalori reali e di segno opposto, PUNTO DI SELLA.

- $\Delta > 0$: - autovalori reali con stesso segno, $\tau^2 - 4\Delta > 0$,

esterno della parabola, NODI STABILI e INSTABILI.
($\tau < 0$) ($\tau > 0$)

- autovalori complessi coniugati, $\tau^2 - 4\Delta < 0$,

interno della parabola, SPIRALI STABILI e INSTABILI, CENTRI.
($\tau < 0$) ($\tau > 0$) ($\tau = 0$)

- autovalori coincidenti, $\tau^2 - 4\Delta = 0$,

sulle parabole, NODI A STELLA e NODI DEGENERI

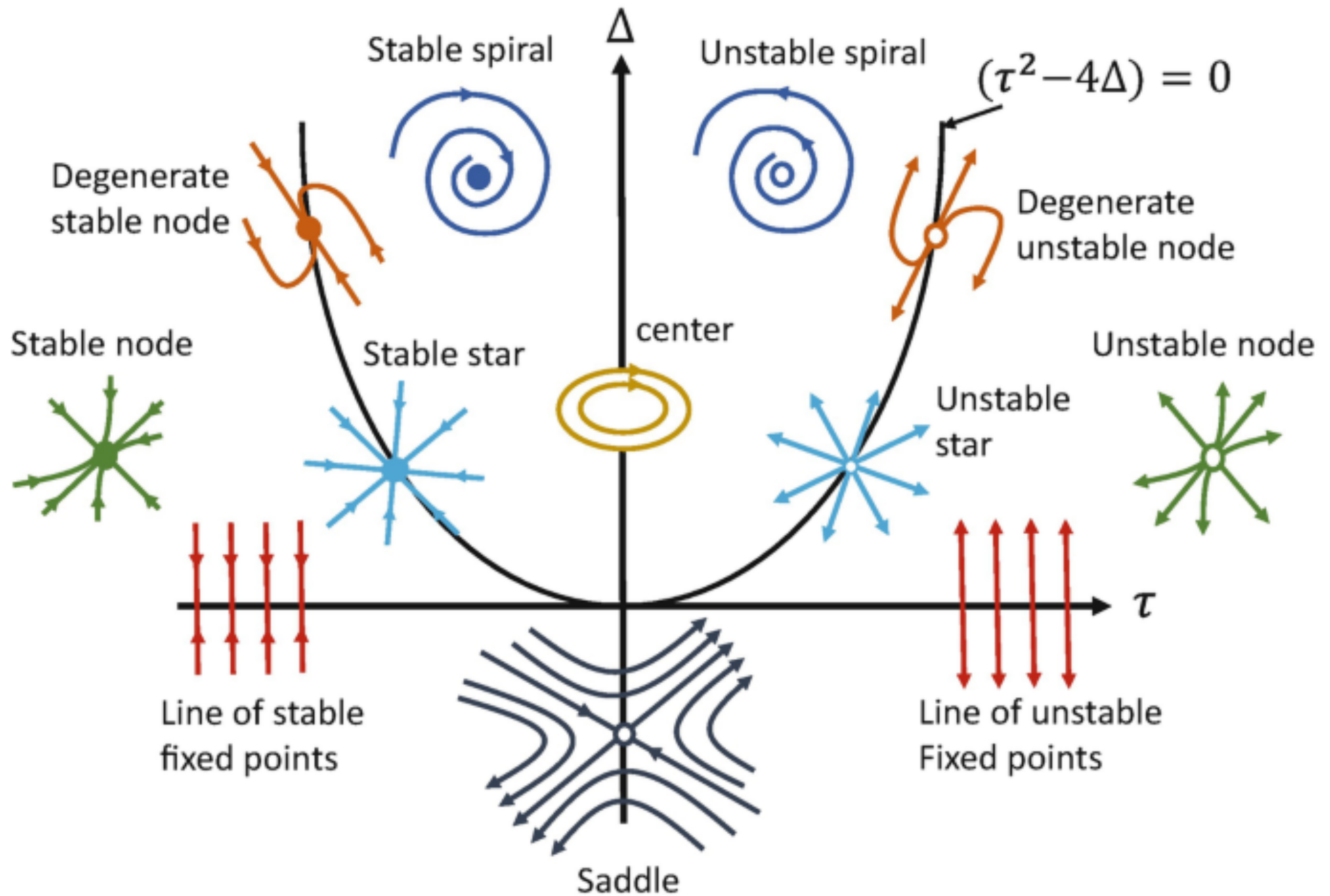
(se trova gli uni o gli altri dipende da α ho 1 o 2 autovettori corrispondenti, quindi richiede un'analisi più specifica).

- $\Delta = 0$, almeno un autovalore è zero, l'origine non è un punto fisso isolato e si hanno una linea di punti fissi o un piano di punti fissi (quando $A = 0$).

oss. Tra i casi di frontiera, i CENTRI sono certamente i più importanti poiché si trovano comunemente nei sistemi meccanici senza attrito, in cui l'energia si conserva.

ESERCIZIO PER CASA

Verificare e convincersi delle affermazioni contenute in queste pagine.



Da “An Introduction to Dynamical Systems Theory”, in “Thermoacoustic Instability” di R. I. Sujith and Samadhan A. Pawar, Springer 2021.

SISTEMI NON LINEARI BIDIMENSIONALI

Qui tratteremo soprattutto i punti fissi.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x}) \quad \text{con} \quad \underline{x} = (x_1, x_2) \\ \underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}))$$

$\underline{x}$ rappresenta un punto nel piano delle fasi e $\underline{\dot{x}}$ la sua velocità.

NOTE: - L'intero piano è riempito di traiettorie, poiché ogni punto può essere preso come condizione iniziale.

- Per un sistema non lineare nella maggior parte dei casi non c'è speranza di trovare una soluzione analitica. Anche quando si arriva a una formula esplicita, spesso sarebbe troppo complicate per fare delle deduzioni fisiche e partire da esse.
- Invece possiamo disegnare il RITRATTO DI FASE del sistema e partire da $\underline{f}(\underline{x})$.

Le caratteristiche principali di un RITRATTO DI FASE sono:

(diapositive con figure 6.1.2 del libro)

(A, B, C in figura)

1. I punti fissi, che soddisfanno l'equazione $\underline{f}(\underline{x}^*) = \underline{0}$ e che corrispondono agli stati stazionari o di equilibrio del sistema.
2. Le orbite chiuse (D in figura), che corrispondono a soluzioni periodiche.
3. La disposizione delle traiettorie attorno ai punti fissi.
Per esempio intorno ad A e C la disposizione è simile, ma molto diversa rispetto all'attorno di B.
4. La stabilità o l'instabilità dei punti fissi o delle orbite chiuse.
In figura, A, B e C sono instabili mentre l'orbita chiusa D è stabile.

RITRATTO DI FASE

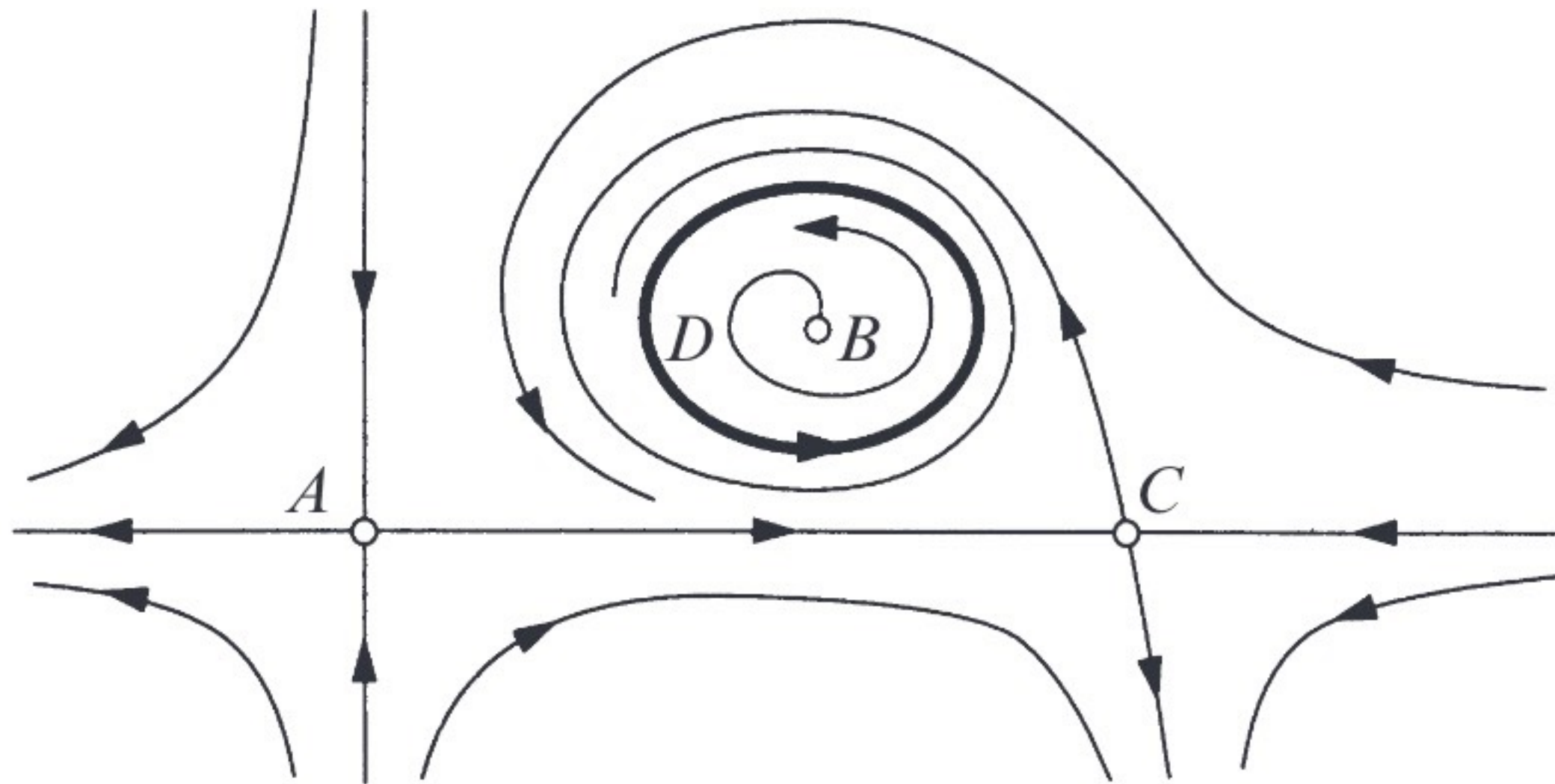


Immagine da S. H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos, CRC Press.

INTEGRAZIONE NUMERICA

L'integrazione numerica di $\dot{x} = f(x)$ non è molto più complicata di quella di $\dot{x} = f(x)$.

Usando il metodo di Runge-Kutta in forma vettoriale

$$\underline{x}_{m+1} = \underline{x}_m + \frac{1}{6} (\underline{k}_1 + 2\underline{k}_2 + 2\underline{k}_3 + \underline{k}_4)$$

con $\underline{k}_1 = \underline{f}(\underline{x}_m) \Delta t$

$$\underline{k}_2 = \underline{f}\left(\underline{x}_m + \frac{1}{2}\underline{k}_1\right) \Delta t$$

$$\underline{k}_3 = \underline{f}\left(\underline{x}_m + \frac{1}{2}\underline{k}_2\right) \Delta t$$

$$\underline{k}_4 = \underline{f}(\underline{x}_m + \underline{k}_3) \Delta t$$

$\Delta t = 0.1$ solitamente garantisce un'accuratezza sufficiente.

Nel produrre i grafici è utile disegnare il campo di direzioni

con piccoli segmenti che indicano la direzione locale del flusso.

ES. Per arrivare al campo di direzioni in figura.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + e^{-y} \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \quad \text{PUNTI FISSI per cui } \begin{aligned} \dot{x} &= 0 \\ \dot{y} &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} x + e^{-y} &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \underline{x}^* = (-1, 0)$$

Determiniamone la stabilità.

$$y = y_0 e^{-t}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0 \Rightarrow \dot{x} \approx x + 1 \Rightarrow \frac{dx}{x+1} \approx dt;$$

$$\ln|x+1| \approx t+c; \quad x+1 = e^{t+c}; \quad x = A e^t - 1$$

crescita
esponenziale

$$\text{se } x(0) = x_0, \quad x_0 = A - 1, \quad A = x_0 + 1$$

$$\Rightarrow x(t) = (x_0 + 1) e^t - 1$$

La crescita esponenziale di $x(t)$ suggerisce che il punto fisso sia instabile.

Infatti se sostituiamo $y_0 = 0$ otteniamo

$$x(t) = (x_0 + 1) e^t - 1$$

quindi $\underline{x}^*$ è effettivamente instabile.

$$\left(\begin{aligned} y(t) &= 0 \end{aligned} \right.$$

instabilità sull'asse x .

CAMPO DI DIREZIONE

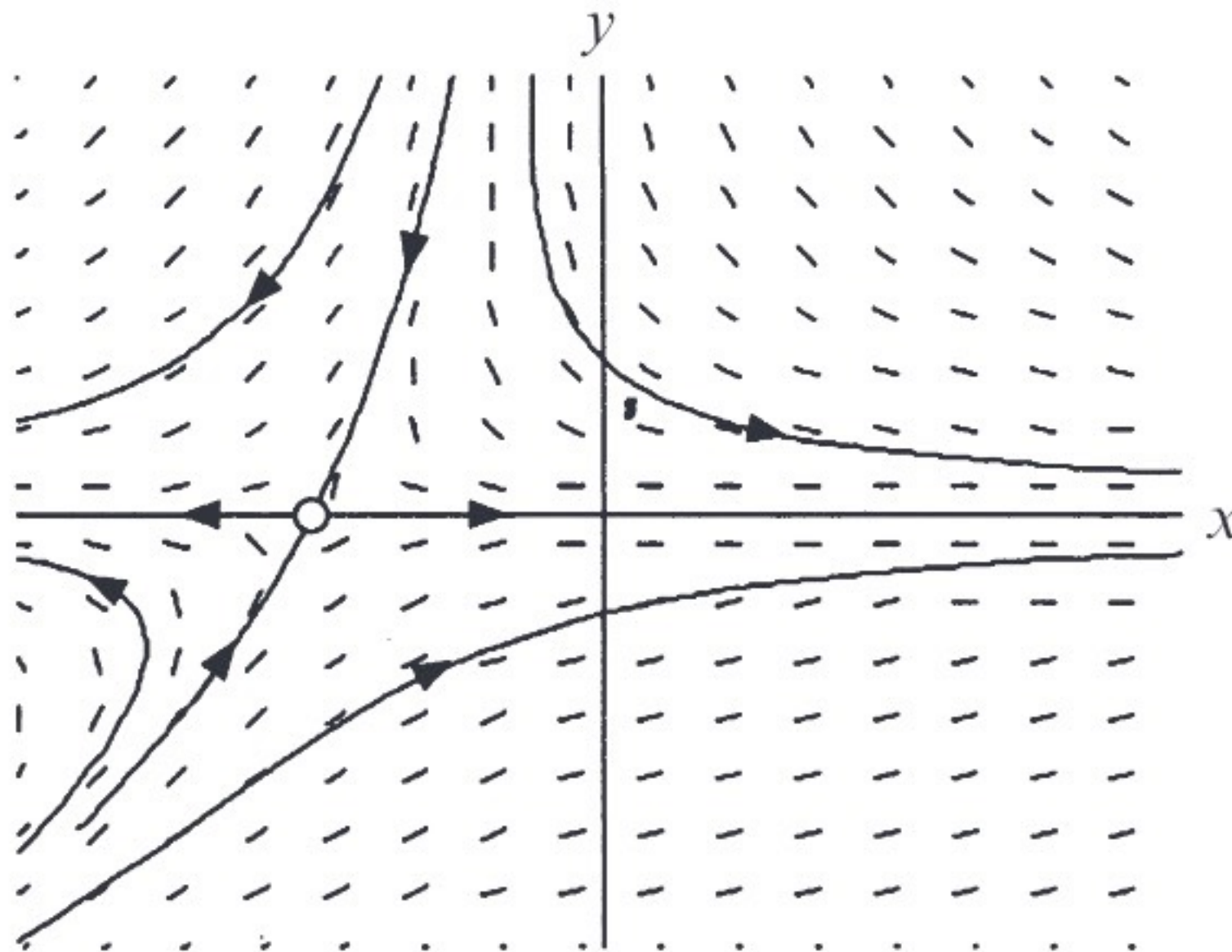


Immagine da S. H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos, CRC Press.

In generale per i ritratti di fase può aiutare disegnare le isocline in cui $\dot{x}=0$ o $\dot{y}=0$, che contengono i punti in cui il flusso è puramente orizzontale o verticale.

Nel nostro caso il flusso è orizzontale ($\dot{y}=0$) quando $y=0$, quindi sull'asse x . Invece è verticale ($\dot{x}=0$) quando $x=-e^{-y}$; $\ln|-x|=-y$;

$$y = \ln(-x)$$

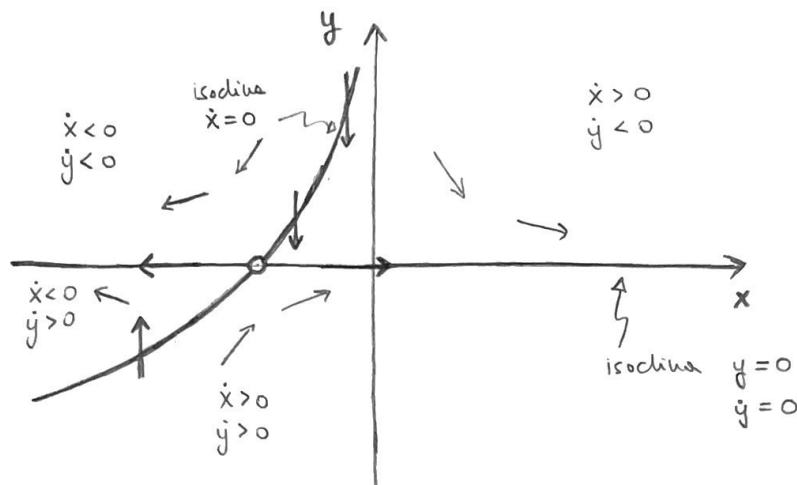
con $x < 0$

passa per $x^* = (-1, 0)$

Se $y=0$,

$\dot{x} > 0$ quando $x > -1$

$\dot{x} < 0$ quando $x < -1$



Quando $y > 0$, $\dot{y} < 0$

$y < 0$, $\dot{y} > 0$

Oss. Le isocline non sono necessariamente traiettorie!

→ campo di direzioni in dispositive (fig. 6.1.4 del libro)

• ESISTENZA, UNICITÀ e CONSEGUENZE TOPOLOGICHE

In realtà, in generale, non siamo nemmeno sicuri che il sistema

$\dot{x} = f(x)$ abbia una soluzione.

Teorema di esistenza e unicità

Dato il problema a valori iniziali $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$, supponiamo che f sia continua

e lo siano tutte le sue derivate parziali $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, n$ per x

in un insieme aperto connesso $D \subset \mathbb{R}^n$ (f continuamente differenziabile).

Allora per $x_0 \in D$, il problema a valori iniziali ha una soluzione

$x(t)$ su qualche intervallo di tempo $(-\tau, \tau)$ intorno a $t=0$,

e questa soluzione è unica.

D'ora in poi supporremo che le nostre f siano continuamente differenziabili.

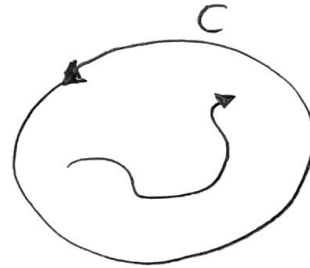
Corollario

Traiettorie diverse non s'intersecano mai.

Se si intersecassero ci sarebbero due soluzioni che partono dallo stesso punto (il punto d'intersezione) e questo violerebbe l'unicità.

Negli spazi di fase bidimensionali ci sono conseguenze topologiche speciali.

Per esempio, in presenza di un'orbita chiusa, ogni traiettoria che entra al suo interno resta al suo interno.



E quindi?

Il teorema di Poincaré-Bendixson ci dice che, in 2 dimensioni, se una traiettoria è confinata in una regione del piano e non ci sono punti fissi all'interno allora la traiettoria o un certo punto si avvicinerà all'orbita chiusa.

PUNTI FISSI E LINEARIZZAZIONE

La linearizzazione serve ad approssimare il ritratto di fase del sistema non lineare a quello di un sistema lineare.

Sia

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}\quad \text{con } (x^*, y^*) \text{ un punto fisso, cioè } \begin{aligned}f(x^*, y^*) &= 0 \\ g(x^*, y^*) &= 0\end{aligned}$$

Siano $u = x - x^*$ $v = y - y^*$ componenti di una piccola perturbazione dal punto fisso.

Per sapere se la perturbazione cresce o decresce, dobbiamo ricavare dalle equazioni differenziali per u e v .

$$\dot{u} = \dot{x}$$

$$= f(x^* + u, y^* + v) = f(x^*, y^*) + u \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} + v \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} + \mathcal{O}(u^2, v^2, uv);$$

$$\dot{u} = u \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} + v \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} + \underbrace{\mathcal{O}(u^2, v^2, uv)}$$

poiché u, v sono piccoli, i termini quadratici saranno molto piccoli.

Analogamente,

$$\dot{v} = u \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} + v \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} + \mathcal{O}(u^2, v^2, uv)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)}}_{\text{Jacobiano}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \text{termini quadratici}$$

SISTEMA LINEARE

che possiamo analizzare con i metodi discussi nella lezione precedente

Domanda: quando possiamo tranquillamente trascurare i termini quadratici?

Se il sistema lineare prevede una sella, un nodo o una spirale, allora il punto fisso del sistema non lineare sarà realmente una sella, un nodo o una spirale.

I casi limite, cioè centri, nodi degeneri, stelle o punti fissi non isolati, sono più difficili da trattare.

Esempio

Troviamo i punti fissi del sistema

$$\dot{x} = -x + x^3$$

$$\dot{y} = -2y$$

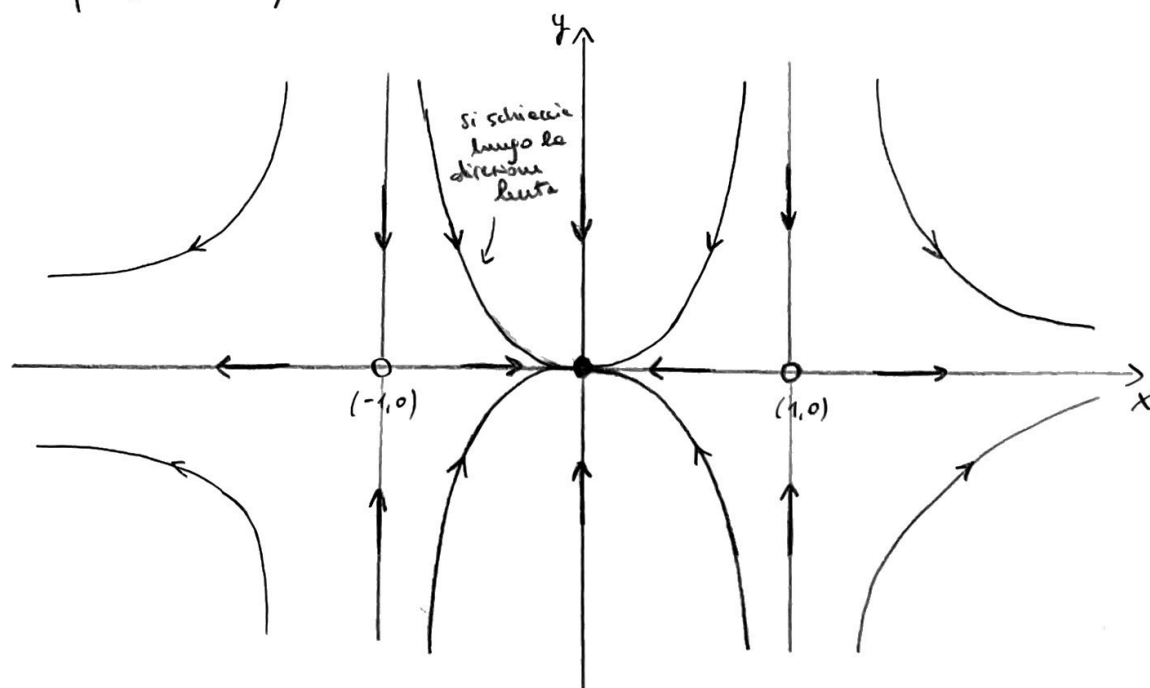
$$x(x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (0,0); (1,0); (-1,0)$$
$$y = 0$$

La matrice Jacobiana

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 3x^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \Delta = 2 \quad \tau = -3 \quad \text{NODO STABILE}$$

$$A_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \Delta = -4 \quad \tau = 0 \quad \text{SELLA, come anche } (-1,0)$$



È un sistema disaccoppiato.

Nella direzione y c'è sempre un decadimento esponenziale verso $y=0$.

Le linee verticali sono INVARIANTI, poiché isocline con $\dot{x}=0$.

Infine, il ritratto di fase diviene simmetrico rispetto all'origine

poiché le equazioni sono invarianti per $x \mapsto -x$
 $y \mapsto -y$.

ESEMPIO

$$\dot{x} = -y + a x (x^2 + y^2)$$

$$\dot{y} = x + a y (x^2 + y^2)$$

Consideriamo il punto fisso $(0,0)$.

Osservazione. Per qualsiasi sistema con un punto fisso nell'origine, x e y rappresentano esse stesse delle perturbazioni dal punto fisso, poiché $u = x - x^* = x$, $v = y - y^* = y$, quindi la linearizzazione si semplifica omettendo semplicemente i termini non lineari del sistema:

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Delta = +1 \\ \tau = 0 \end{array} \quad \text{CENTRO}$$

Ora analizziamo il sistema non lineare passando alle coordinate polari $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow x\dot{x} + y\dot{y} = r\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = ar^3$

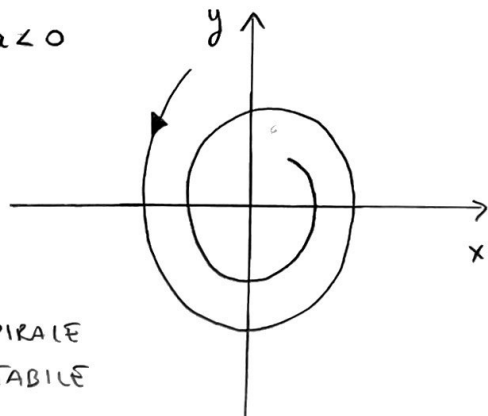
↑
sostituendo

$$\text{Inoltre } \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} = 1$$

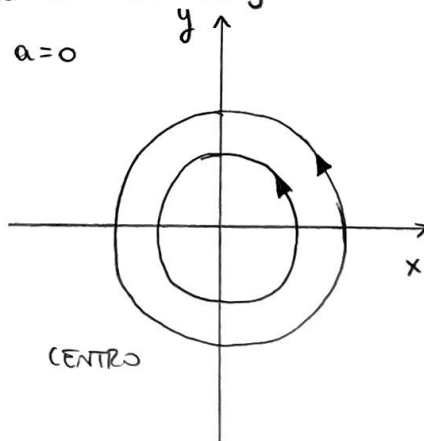
↑ ↑
non usato qui sostituendo

⇒ Tutte le traiettorie ruotano intorno all'origine con velocità angolare $\dot{\theta} = 1$.

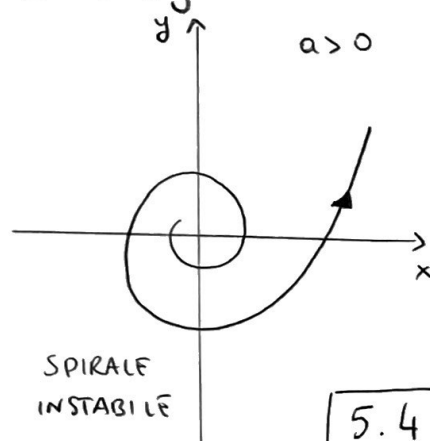
$a < 0$



$a = 0$



$a > 0$



In questo caso l'analisi lineare ha dato un risultato sbagliato: la predizione del centro non è affidabile in generale ma solo per $a=0$.

OSS. STELLE e NODI DEGENERI possono essere alterati da piccole non linearità, ma la loro stabilità non cambia.

Ad esempio, una stella stabile può diventare una spirale instabile o un nodo instabile.

Se siamo interessati alla sola stabilità e non alle traiettorie allora i punti fissi si possono classificare più grossolanamente come segue:

CASI "SODI" (punti fissi iperbolici)

SORGENTI: entrambe gli autovalori hanno parti reali positive $\text{Re}(\lambda_1) > 0$
(repulsori) $\text{Re}(\lambda_2) > 0$

POZZI: entrambe gli autovalori hanno parti reali negative $\text{Re}(\lambda_1) < 0$
(attrattori) $\text{Re}(\lambda_2) < 0$

SELLE: un autovalore è negativo e uno è positivo $\text{Re}(\lambda_2) < 0$
 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$

CASI "MARGINALI" (punti fissi non-iperbolici)

CENTRI: entrambe gli autovalori sono immaginari $\text{Re}(\lambda_1) = 0$
 $\text{Re}(\lambda_2) = 0$

PUNTI FISSI DI ORDINE SUPERIORE o NON-ISOLATI: $\lambda_1 = 0$ vel $\lambda_2 = 0$

In generale, i casi marginali sono quelli per cui per almeno un autovalore $\text{Re}(\lambda) = 0$.

Se $\operatorname{Re}(\lambda_1) \neq 0$ e $\operatorname{Re}(\lambda_2) \neq 0$ il punto fisso si dice anche IPERBOLICO.

Per i sistemi monodimensionali avremo visto che la stabilità di un punto fisso era predetta accuratamente dalla linearizzazione se $f'(x^*) \neq 0$.

$\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0$ è l'analogo bidimensionale di quella condizione.

Questa idea si generalizza a sistemi n -dimensionali, in cui un punto fisso è iperbolico se $\operatorname{Re}(\lambda_i) \neq 0$ per $i=1, \dots, n$.

TEOREMA DI HARTMAN-GROBMAN

Il ritratto di fase vicino ad un punto fisso iperbolico è TOPOLOGICAMENTE EQUIVALENTE al ritratto di fase della linearizzazione.

"Topologicamente equivalente" significa che c'è un omeomorfismo che mappa un ritratto di fase locale sull'altro: le traiettorie si possono piegare e deformare, ma non tagliare/stappare.

Esempi di equivalenza topologica (al di là dell'iperbolicità dei punti fissi):
le traiettorie chiuse devono restare chiuse e le traiettorie che collegano punti di sella non devono essere rotte.

DEFINIZIONE: STABILITÀ STRUTTURALE

Un ritratto di fase si dice strutturalmente stabile se la sua topologia non può essere cambiata da una perturbazione arbitrariamente piccola del campo vettoriale.

Ad esempio, se c'è un centro, il ritratto di fase non è strutturalmente stabile, poiché una quantità di smorzamento arbitrariamente piccola aggiunta converterebbe il centro in una spirale.

SISTEMI CONSERVATIVI

$$m\ddot{x} = F(x) \quad \text{con } F \text{ che non dipende da } \dot{x} \text{ e } t.$$

$$F(x) = -\frac{dV}{dx}, \quad E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) \quad \text{è costante nel tempo}$$

In generale, dato un sistema $\dot{x} = f(x)$ una quantità conservata (o costante del moto o integrale primo) è una funzione continua a valori reali $E(x)$ costante su ogni traiettoria, cioè $\frac{dE}{dt} = 0$.

Si esclude il caso banale $E(x) = 0$, altrimenti (tutti i sistemi sarebbero conservativi.

Esercizio (per casa): mostrare che un sistema conservativo non può avere punti fissi attrattivi.

Che tipo di punti fissi si possono avere?

Esempio massa con $m=1$ in un potenziale a doppia valle $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} = x - x^3 \Rightarrow \ddot{x} = x - x^3 \Rightarrow \dot{x} = y$$

$$\dot{y} = x - x^3 = x(1 - x^2)$$

Punti fissi $(0,0)$; $(1,0)$; $(-1,0)$

Jacobiano $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Delta = 3x^2 - 1$$

$$\tau = 0$$

$(0,0)$ SELLA

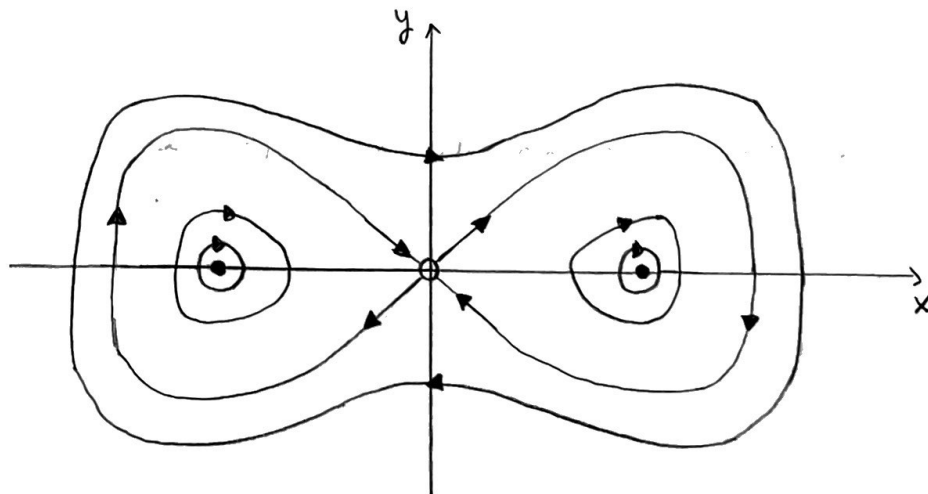
$(1,0)$ CENTRO

$(-1,0)$ CENTRO

I centri dovrebbero farci chiedere se lo siano veramente.

In questo caso sì perché l'energia è conservata.

Le traiettorie sono curve chiuse con energia costante $E = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 = \text{cost.}$



in generale
SOLUZIONI
PERIODICHE

ENERGIA E CENTRI

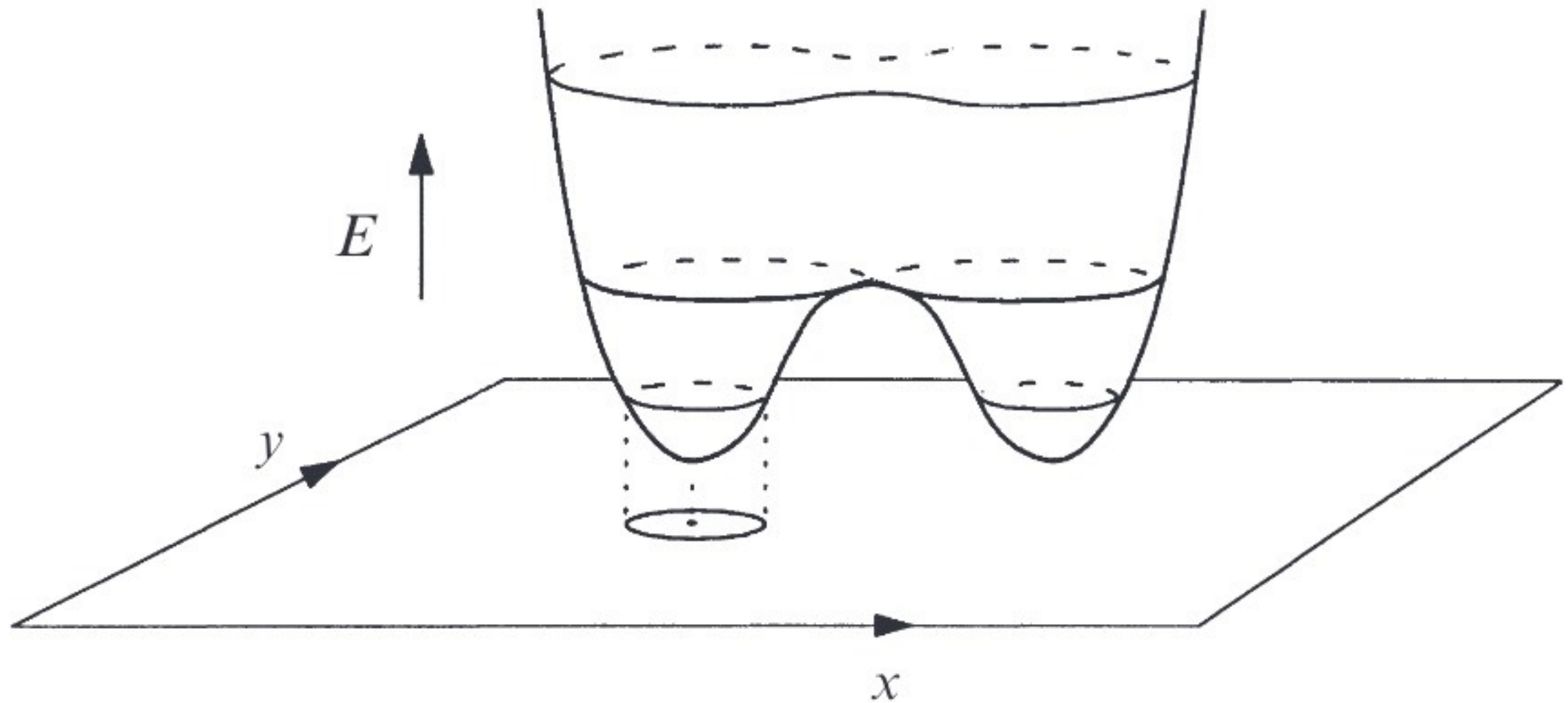


Immagine da S. H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos, CRC Press.

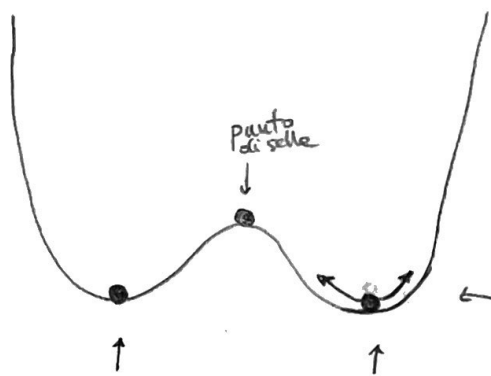
Fanno eccezione i punti di equilibrio $(1,0)$ e $(-1,0)$ e le due traiettorie che partono dall'origine e ritornano ad esso.

DEFINIZIONE

Traiettorie che partono da un punto fisso e tornano ad esso sono dette **OMOCLINICHE**.

Sono comuni nei sistemi conservativi ma rare altrove.

Un'orbita omoclinica non è una soluzione periodica poiché il sistema necessita un tempo infinito ($t \rightarrow \pm\infty$) per raggiungere il punto fisso.



← le piccole oscillazioni attorno ai punti di equilibrio corrispondono alle piccole orbite chiuse.

punti di equilibrio
neutralmente stabili
corrispondenti ai punti
fissi $(1,0), (-1,0)$

TEOREMA per i centri nonlineari dei sistemi conservativi

Sia $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$, con $\underline{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\underline{f}$ continuamente differenziabile,

$E(\underline{x})$ una quantità conservata e $\underline{x}^*$ un punto fisso isolato.

Se $\underline{x}^*$ è un minimo locale di E allora tutte le traiettorie sufficientemente vicine a $\underline{x}^*$ sono chiuse.

Esempio: orbite periodiche nell'esempio precedente intorno a $(1,0)$ o $(-1,0)$.
I centri si trovano ai minimi locali della funzione energia.

Osservazioni. Il teorema è valido anche per massimi locali di E ,
rimpiazzando $E \mapsto -E$.

(diapositive da figure 6.5.3 del libro)

SISTEMI REVERSIBILI

Qualsiasi sistema del secondo ordine invariante per $t \mapsto -t$
 $y \mapsto -y$

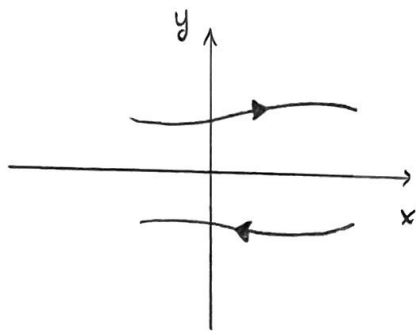
Esempio $\dot{x} = f(x, y)$ con f dispari in y , $f(x, -y) = -f(x, y)$
 $\dot{y} = g(x, y)$ e g pari in y , $g(x, -y) = g(x, y)$

Esempio

Ogni sistema meccanico del tipo $m\ddot{x} = F(x)$ è REVERSIBILE NEL TEMPO
 $t \mapsto -t$

$\dot{x} = y$ le equazioni rimangono le stesse $y \mapsto -y$
 $\dot{y} = \frac{1}{m} F(x)$

Se $(x(t), y(t))$ è soluzione allora anche $(x(-t), -y(-t))$ lo è:



I sistemi reversibili sono diversi dai sistemi conservativi ma condividono diverse proprietà.

Teorema per i centri non lineari nei sistemi reversibili

Supponiamo $x^* = 0$ centro non lineare per $\dot{x} = f(x, y)$ reversibile.
 $\dot{y} = g(x, y)$

Allora tutte le traiettorie sufficientemente vicine a x^* sono chiuse.

