

Giuseppe Pucci

giuseppe-pucci@cmr.it

www.gpucci.net

LIBRO: "Nonlinear Dynamics and Chaos" di Steven H. Strogatz

Metodo: lezioni frontali alla lavagna, con esercizi da svolgere da parte degli studenti in classe e a casa.

STORIA DELLA DINAMICA

- proiezione slide p. 5 del libro

→ Problema dei tre corpi impossibile da risolvere analiticamente

→ Poincaré iniziò a porsi domande sulla STABILITÀ dei sistemi planetari anche sulle loro posizioni esatte

↳ 1890s approccio geometrico → intui sensibilità alle condizioni iniziali, quindi il CAOS.↳ comprensione più profonda della meccanica classica

→ 1950s computer

→ 1963 Lorentz: caos (ma con una struttura)

→ 1970s Feigenbaum: leggi universali per la transizione al caos
↳ legge con le transizioni di fase

SISTEMI DINAMICI

EQUAZIONI DIFFERENZIALI
continuità del tempoMAPPE ITERATIVE
tempo discreto

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad \text{oscillatore armonico smorzato}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{equazione del calore}$$

→ qui ci concentriamo su questo tipo, cioè sulla sola dipendenza temporale

Dynamics — A Capsule History

1666	Newton	Invention of calculus, explanation of planetary motion
1700s		Flowering of calculus and classical mechanics
1800s		Analytical studies of planetary motion
1890s	Poincaré	Geometric approach, nightmares of chaos
1920–1950		Nonlinear oscillators in physics and engineering, invention of radio, radar, laser
1920–1960	Birkhoff	Complex behavior in Hamiltonian mechanics
	Kolmogorov	
	Arnol'd	
	Moser	
1963	Lorenz	Strange attractor in simple model of convection
1970s	Ruelle & Takens	Turbulence and chaos
	May	Chaos in logistic map
	Feigenbaum	Universality and renormalization, connection between chaos and phase transitions
		Experimental studies of chaos
	Winfrey	Nonlinear oscillators in biology
	Mandelbrot	Fractals
1980s		Widespread interest in chaos, fractals, oscillators, and their applications

Approccio generale alle equazioni differenziali ordinarie:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n)$$

$\vdots$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

SISTEMA

ES. $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 \end{cases}$$

LINEARE purché tutte le x_i a destra compaiano con esponente 1.

Altrimenti il sistema si direbbe NON LINEARE.

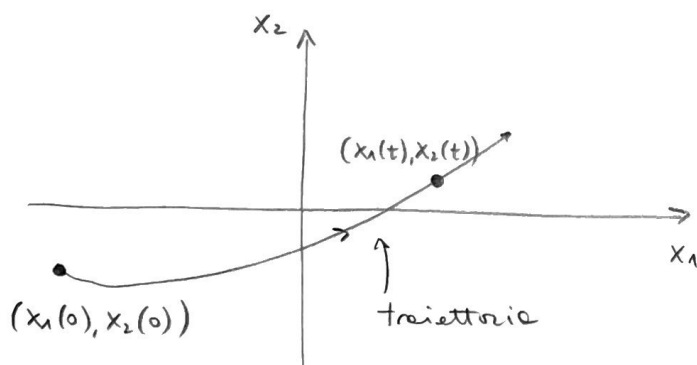
ES. $\ddot{x} + \frac{g}{L} \sin x = 0$, pendolo, x : angolo con la verticale

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{L} \sin x_1 \end{cases}$$

NON LINEARE, difficile da risolvere analiticamente

ma con le tecniche di dinamica non lineare sapremmo estrarre molte informazioni sulla fisica del sistema.

In che modo? Usando lo SPAZIO DELLE FASI: disegnando la traiettione estraiamo informazioni sulle soluzioni.



→ Il ragionamento GEOMETRICO ci permetterebbe di disegnare la traiettione senza risolvere analiticamente il sistema.

NOTA Il sistema

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n)$$

$\vdots$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

è detto "n-dimensionale"
o "di ordine n"

- SISTEMI NON AUTONOMI, in cui $\vec{x}$ presenta una dipendenza esplicita del tempo.

ES- $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F\cos t$

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

$$x_3 = t \Rightarrow \dot{x}_3 = 1$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{1}{m} (-kx_1 - bx_2 + F\cos x_3)$$

$$\dot{x}_3 = 1$$

Questo cambio di variabile ci fa visualizzare traiettorie CONGELATE nello spazio delle fasi

Fisicamente il cambio di variabile ha senso se si considera che l'oscillatore armonico forzato smorzato richiede 3 numeri $(x, \dot{x}, t)$ per prevedere il futuro una volta noto il presente.

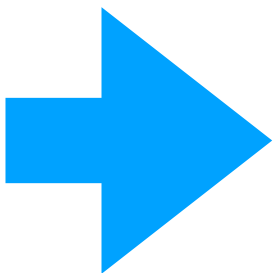
mostra slide 2 : prospetto dinamico del mondo fisico.

- parte in alto a destra del prospetto:
equazioni alle derivate parziali che coinvolgono un "continuo" infinito di variabili poiché ogni punto dello spazio aggiunge gradi di libertà; trattabili soprattutto grazie alle trasformate di Fourier e altre trasformate.

NOTA: la maggior parte dei fenomeni è non lineare, e il principio di sovrapposizione non si può applicare!

PROSPETTO DINAMICO DEL MONDO FISICO

		Number of variables →				
		$n = 1$	$n = 2$	$n \geq 3$	$n \gg 1$	Continuum
Nonlinearity ↓	Linear	<i>Growth, decay, or equilibrium</i> Exponential growth RC circuit Radioactive decay	<i>Oscillations</i> Linear oscillator Mass and spring RLC circuit 2-body problem (Kepler, Newton)	Civil engineering, structures Electrical engineering	<i>Collective phenomena</i> Coupled harmonic oscillators Solid-state physics Molecular dynamics Equilibrium statistical mechanics	<i>Waves and patterns</i> Elasticity Wave equations Electromagnetism (Maxwell) Quantum mechanics (Schrödinger, Heisenberg, Dirac) Heat and diffusion Acoustics Viscous fluids
	Nonlinear	Fixed points Bifurcations Overdamped systems, relaxational dynamics Logistic equation for single species	Pendulum Anharmonic oscillators Limit cycles Biological oscillators (neurons, heart cells) Predator-prey cycles Nonlinear electronics (van der Pol, Josephson)	<i>Chaos</i> Strange attractors (Lorenz) 3-body problem (Poincaré) Chemical kinetics Iterated maps (Feigenbaum) Fractals (Mandelbrot) Forced nonlinear oscillators (Levinson, Smale) Practical uses of chaos Quantum chaos ?	<i>The frontier</i> Coupled nonlinear oscillators Lasers, nonlinear optics Nonequilibrium statistical mechanics Nonlinear solid-state physics (semiconductors) Josephson arrays Heart cell synchronization Neural networks Immune system Ecosystems Economics	<i>Spatio-temporal complexity</i> Nonlinear waves (shocks, solitons) Plasmas Earthquakes General relativity (Einstein) Quantum field theory Reaction-diffusion, biological and chemical waves Fibrillation Epilepsy Turbulent fluids (Navier-Stokes) Life



FLUSSI LUNGO UNA LINEA (Cap. 2 del libro)

$$n = 1, \quad \dot{x} = f(x)$$

TERMINOLOGIA: per "sistema" si intende "sistema dinamico" non "sistema di equazioni"

METODO della DINAMICA

Interpretare un'equazione differenziale come un campo vettoriale

ES. $\dot{x} = \sin x$

$$\frac{dx}{dt} = \sin x; \quad dt = \frac{dx}{\sin x}; \quad t = \int \operatorname{cosec} x \, dx = -\ln |\operatorname{cosec} x + \cotan x| + C$$
$$= -\ln \left| \frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right| + C$$

→ not necessary

$$= -\ln \left| \frac{1 + \cos x}{\sin x} \right| + C$$

se $x(0) = x_0$ allora $C = \ln \left| \frac{1 + \cos x_0}{\sin x_0} \right| = \ln |\operatorname{cosec} x_0 + \cotan x_0|$

$$\Rightarrow t = \ln \left| \frac{\operatorname{cosec} x_0 + \cotan x_0}{\operatorname{cosec} x + \cotan x} \right| \quad \text{risultato esatto.}$$

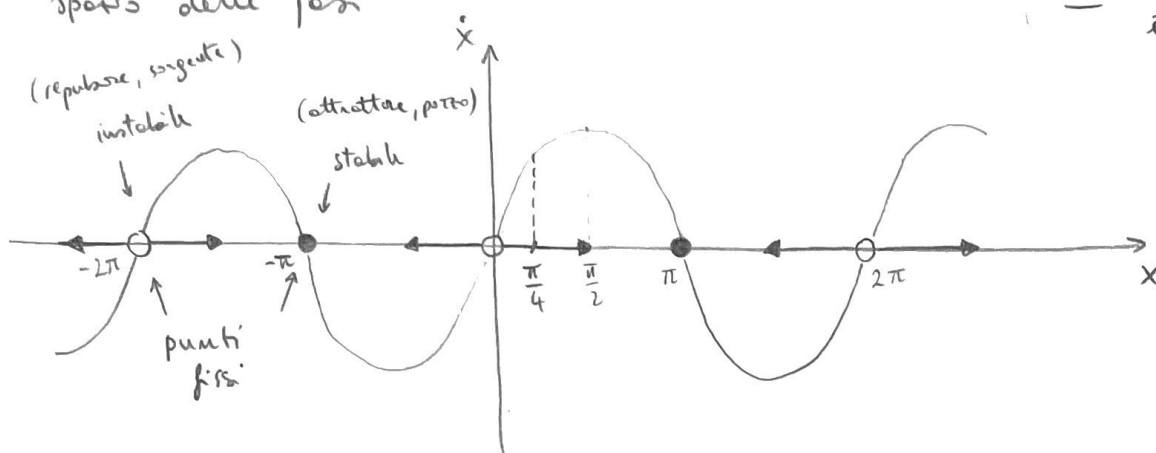
Domande

1. Supponiamo che $x_0 = \frac{\pi}{4}$ quali sono le caratteristiche di $x(t)$ per $t > 0$? Cosa succede quando $t \rightarrow \infty$?
2. Per una condizione iniziale arbitraria x_0 qual è il comportamento di $x(t)$ per $t \rightarrow \infty$?

$\Rightarrow$ Il risultato, seppur esatto, è difficile da interpretare!

Nello spazio delle fasi

oss. $\dot{x} = -\sin x$
è il pendolo semplice



$\dot{x} = \sin x$ rappresente un campo vettoriale sulle linee: mi dice
 $\uparrow$
 dir.

il vettore velocità $\dot{x} \neq x$.

RISPOSTE

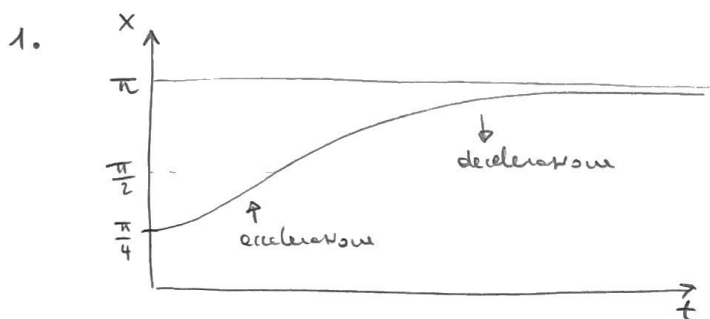


grafico qualitativo

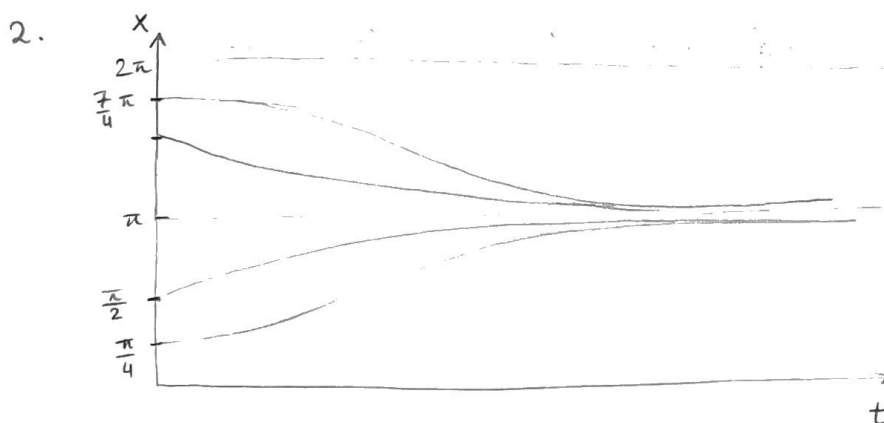
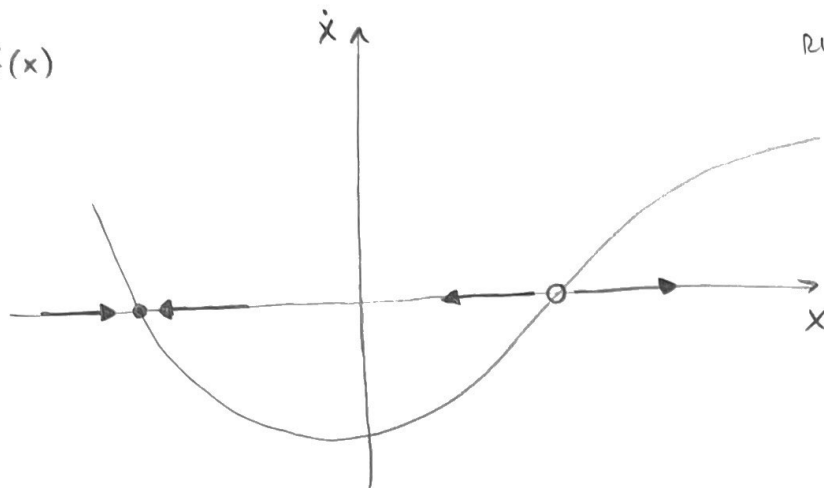


grafico qualitativo

oss. Non abbiamo informazioni quantitative.

PUNTI FISSI E STABILITÀ

$$\dot{x} = f(x)$$



RITRATTO DI FASE

PUNTI FISSI $x^* : f(x^*) = 0$

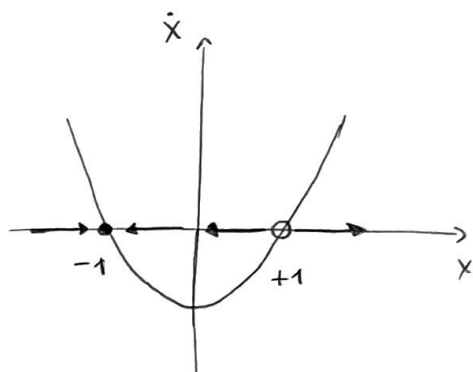
soluzioni di equilibrio : STABILE, le piccole perturbazioni sono smorzate nel tempo

PUNTI FISSI STABILI
(localmente o globalmente)

INSTABILE, le perturbazioni, anche piccole, crescono nel tempo.

PUNTI FISSI INSTABILI

ES. $\dot{x} = x^2 - 1$

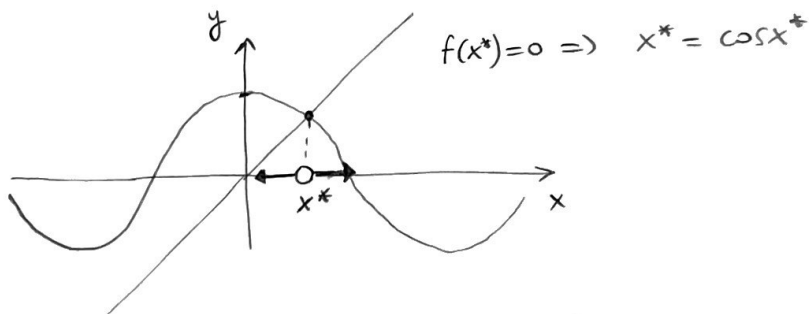


$x^* = -1$ stabile (localmente)

$x^* = +1$ instabile

ES. $\dot{x} = x - \cos x$; $f(x) = x - \cos x$

$y = x$, $y = \cos x$



quando $x > \cos x$ $f(x) > 0$

$x < \cos x$ $f(x) < 0$

$\Rightarrow x^*$ instabile

possiamo classificare la stabilità
di x^* senza avere una formula
esplicita!

CRESCITA DI UNA POPOLAZIONE

$$\dot{N} = rN, \quad r \text{ tasso di crescita}, \quad N(t) = N_0 e^{rt}$$

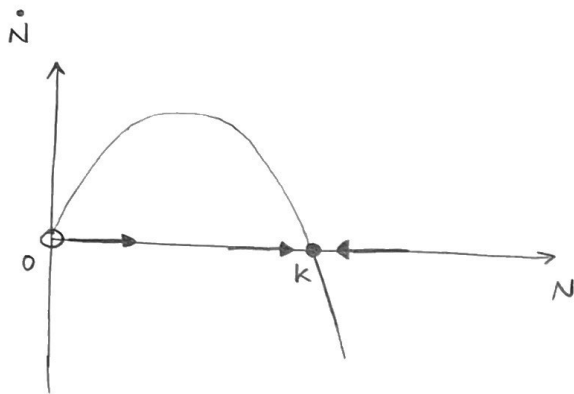
• EQUAZIONE LOGISTICA

$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right), \quad \text{risultato} \quad \frac{\dot{N}}{N} = r - \frac{r}{K}N$$

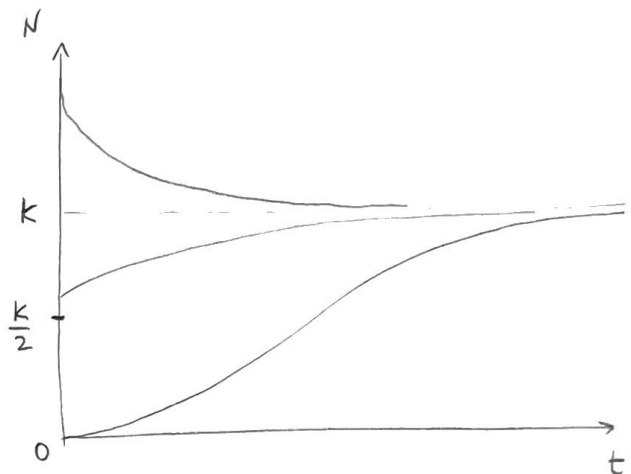
K capacità massima

inizialmente suggerite per descrivere la crescita di una popolazione umana.

Si può risolvere analiticamente, ma noi studiamola come abbiamo imparato



$$\dot{N} = rN - r\frac{N^2}{K}$$



NOTA

L'equazione logistica funziona bene per colture di batteri o altri organismi semplici, ma non funziona per organismi più complessi come ad esempio gli insetti. In questo ultimo caso, dopo una fase iniziale di crescita logistica si osservano grandi oscillazioni persistenti.

ANALISI DI STABILITÀ LINEARE

per misurare la stabilità.

$$\text{systema } \dot{x} = f(x)$$

x^* punto fisso

$$\eta(t) = x(t) - x^* \quad \text{piccole perturbazioni da } x^*$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \dot{\eta} = \frac{d}{dt}(x - x^*) = \dot{x} \Rightarrow \dot{\eta} = \dot{x} = f(x) = f(x^* + \eta)$$

Expandendo in serie di Taylor attorno a x^*

$$f(x^* + \eta) = f(x^*) + \eta f'(x^*) + \mathcal{O}(\eta^2)$$

$$f(x^*) = 0$$

$$\dot{\eta} = \eta f'(x^*) + \mathcal{O}(\eta^2)$$

se $f'(x^*) \neq 0$ e trascurando $\mathcal{O}(\eta^2)$

$$\dot{\eta} \approx \eta f'(x^*)$$

↑

linearizzazione attorno a x^*

$\eta(t)$ cresce esponenzialmente se $f'(x^*) > 0$ x^* instabile
decade " se $f'(x^*) < 0$ x^* stabile

se $f'(x^*) = 0$ allora $\mathcal{O}(\eta^2)$ non sono trascurabili ed è necessaria un'analisi non lineare.

Il segno di

$f'(x^*)$ determina la stabilità di x^*

$|f'(x^*)|$ indica QUANTO è stabile x^*

$\frac{1}{|f'(x^*)|}$ è una scala di tempo caratteristica delle variazioni di $x(t)$ intorno a x^*

ES. $\dot{x} = \sin x$

$$f(x) = \sin x = 0 \Rightarrow x^* = k\pi$$

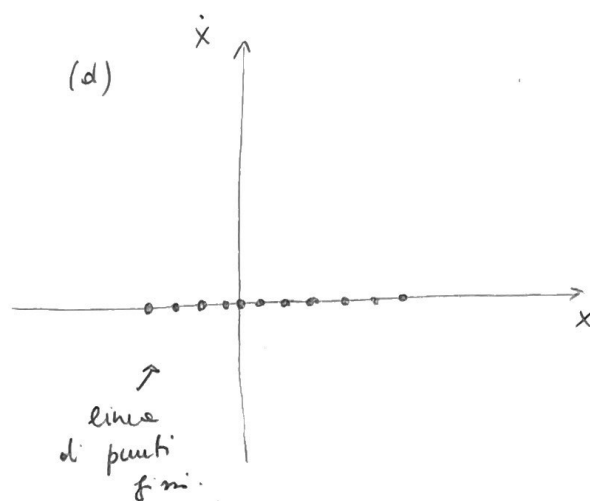
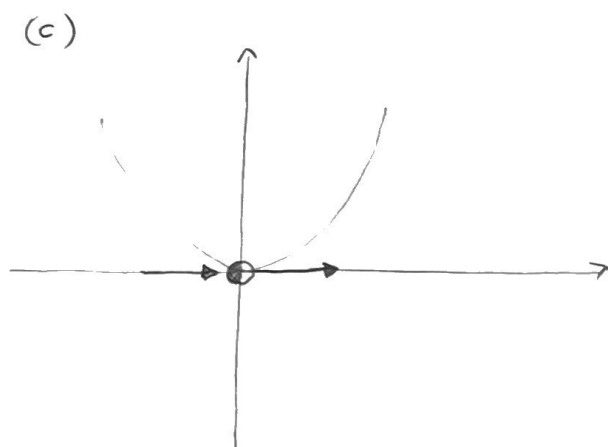
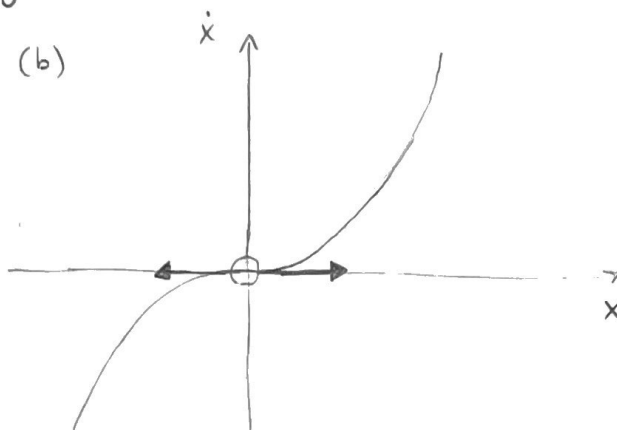
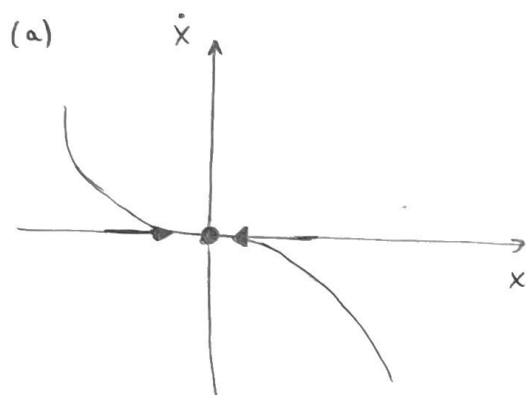
$$f'(x^*) = \cos x^* = \begin{cases} 1 & k \text{ pari} \\ -1 & k \text{ dispari} \end{cases}$$

confronto col grafico in 1.3

ES. $\exists x^* \text{ s.t. } f'(x^*) = 0$? In generale non si può concludere nulla ma l'analisi deve essere svolta caso per caso.

(a) $\dot{x} = -x^3$ (b) $\dot{x} = x^3$ (c) $\dot{x} = x^2$ (d) $\dot{x} = 0$

$x^* = 0$, $f'(x^*) = 0$ per ognuno



ESISTENZA E UNICITÀ (le soluzioni non sono sempre uniche)

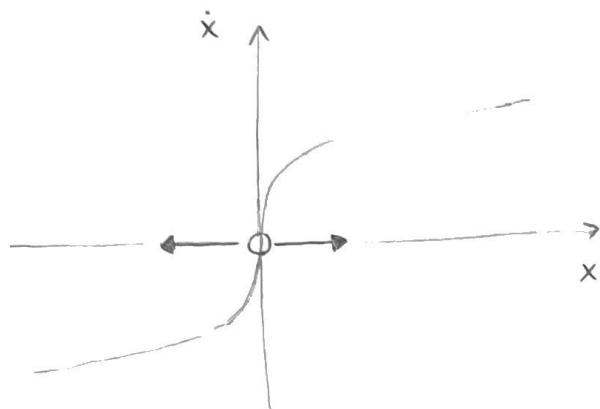
ES. $\dot{x} = x^{1/3}$, $x_0 = 0$

$x = 0$ punto fisso $\Rightarrow x(t) = 0 \quad \forall t$ è soluzione

Allo stesso tempo $\frac{dx}{dt} = x^{1/3}$; $\int \frac{dx}{x^{1/3}} = \int dt$; $\frac{3}{2} x^{2/3} = t + C$

$x(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}$

Poiché le soluzioni non è unica, il nostro approccio geometrico fallisce poiché il punto non sa come muoversi.



$x^* = 0$ è molto instabile
perché $f'(0)$ è infinita

⇒ TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$$

$f(x), f'(x)$ continue su un intervallo aperto $\overset{\mathbb{R}}{\vee}$ dell'asse x con $x_0 \in \mathbb{R}$.

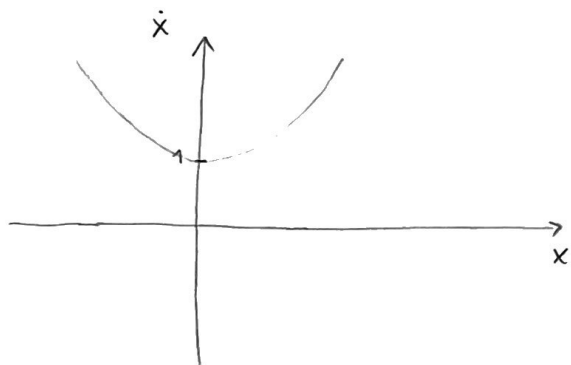
⇒ il problema ha una sola soluzione $x(t)$ per un intervallo di tempo $(-\tau, \tau)$ intorno a $t=0$.

Qualitativamente: se $f(x)$ è sufficientemente liscia la soluzione esiste ed è unica.

oss. Questo non vuol dire che la soluzione esisterà "per sempre".

ES. $\dot{x} = 1 + x^2, \quad x(0) = x_0$

$$f(x) = 1 + x^2$$



$$f(x), f'(x) \in \mathbb{C} \quad \forall x$$

⇒ soluzioni esistono e sono uniche $\forall x_0$
ma non per tutti i tempi

es.

$$x(0) = 0$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int dt; \quad \text{ArcTan } x = t + C$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow C = 0, \quad x(t) = \tan t$$

$$x(t) \text{ esiste solo in } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{perché } \lim_{t \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} x(t) = \pm \infty$$

Fuori da questo intervallo non c'è soluzione per il problema con $x_0 = 0$

Il sistema ha soluzioni che vanno ad infinito in un tempo finito (esplosivo).

IMPOSSIBILITÀ DELLE OSCILLAZIONI

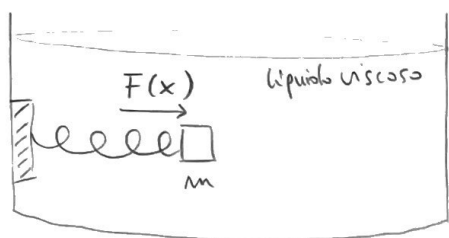
Il punto di fase non cambia mai direzione e, se visto come una soluzione di equilibrio, l'approccio verso di esso è sempre monotono: non ci possono essere oscillazioni in un sistema del 1° ordine.

⇒ Non ci sono soluzioni periodiche al sistema $\dot{x} = f(x)$.

Motivo topologico



Es. $m\ddot{x} + b\dot{x} = F(x)$



$$b\dot{x} \gg m\ddot{x} \Rightarrow b\dot{x} = F(x)$$

$$\dot{x} = \frac{F(x)}{b}$$

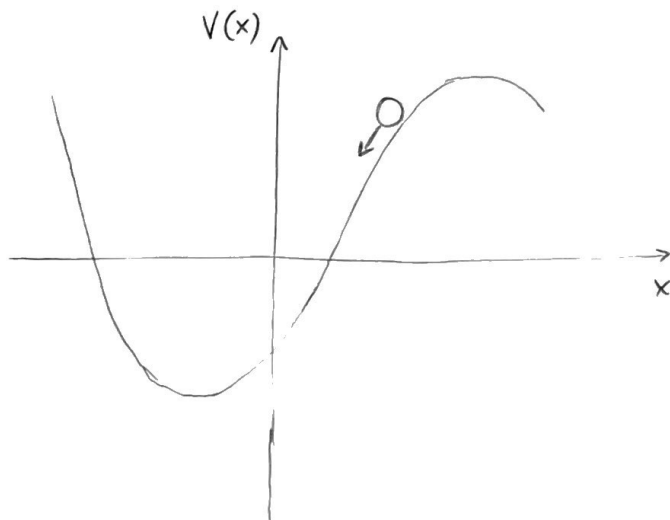
sistema sovrasmorzato

la massa preferisce stare in $x: f(x)=0$
e $f'(x) < 0$

POTENZIALI

$$f(x) = -\frac{dV}{dx}$$

NOTA. Si tratta
sempre di un
sistema sovrasmorzato



Consideriamo $V(x(t))$,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt}$$

$$\dot{x} = -\frac{dV}{dx}, \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{dV}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = -\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \leq 0$$

⇒ $V(t)$ diminuisce lungo la traiettoria,
cioè la particella si muove sempre
verso le valli del potenziale.

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow \text{equilibrio (punti fissi)} \begin{cases} \text{stabile (minimi di } V(x)) \\ \text{instabile (massimi di } V(x)) \end{cases}$$

INTEGRAZIONE NUMERICA di $\dot{x} = f(x)$

Metodo di

Euler $x(t_0 + \Delta t) \approx x_1 = x_0 + f(x_0) \Delta t$

$$\dots \Rightarrow x_{n+1} = x_n + f(x_n) \Delta t$$

(i vari metodi)

probabilmente non serve descriverli perché fatti in fine Computazionale.

ESERCIZI PROPOSTI (da fare in gruppo, in particolare per percorsi d'eccellenza)
da svolgere a casa o in classe in base al tempo e disposizione

• ANALISI DI STABILITÀ LINEARE

2.4.7 $\dot{x} = ax - x^3$ discutere i casi per $a > 0$, $a < 0$, $a = 0$
anche aiutandosi col metodo grafico.

→ introdurre la prossima lezione! Dipendenza dei
parametri e biforcazioni

• ESISTENZA E UNICITÀ

2.5.5 Esempio generale di non-unicità

$$\dot{x} = |x|^{p/q} \quad x(0) = 0 \quad p > 0, q > 0 \text{ interi positivi senza fattori comuni}$$

a) mostrare che c'è un numero infinito di soluzioni per $x(t)$
se $p < q$

b) mostrare che c'è una soluzione unica se $p > q$

• IMPOSSIBILITÀ DELLE OSCILLAZIONI

2.6.1 Perché $m\ddot{x} = -kx$ oscilla anche se $\mathbb{R}$ monodimensionale?

• INTEGRAZIONE NUMERICA

Esempio $\dot{x} = x(1-x)$ equazione logistica con $r=1$, $K=1$
2.8.1

disegnare il "campo delle pendenze" slope field (gradienti)



mostrare

fig. 2.8.2

e 2.8.3

in diapositive.