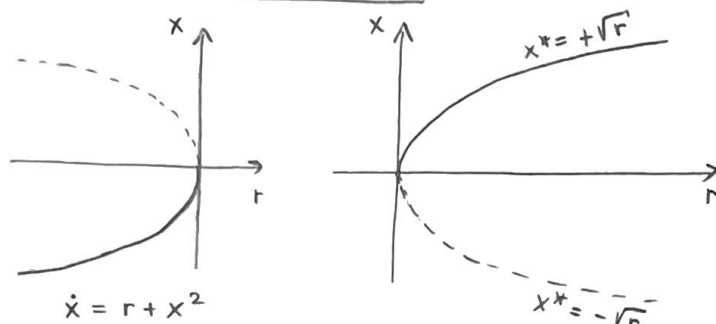


(cap. 3, 4 del libro)

TABELLA SINTETICA delle BIFORCAZIONI

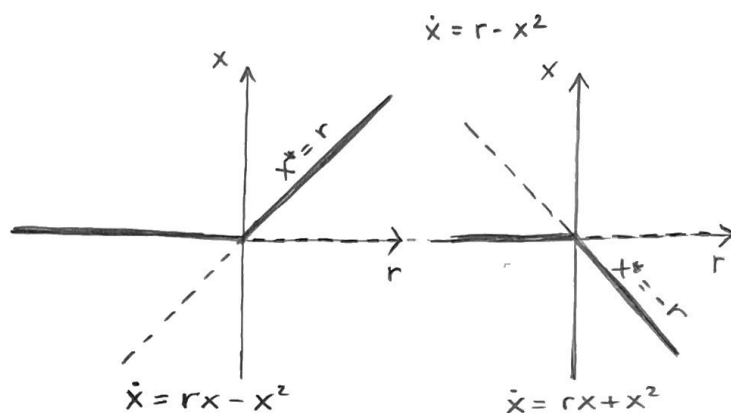
- BIFORCAZIONE A NODO SELLA
Meccanismo di base con cui i punti fissi sono creati o distrutti.

$$\dot{x} = r \pm x^2$$



- BIFORCAZIONE TRANSCRITICA
Un punto fisso esiste sempre ma cambia la sua stabilità.

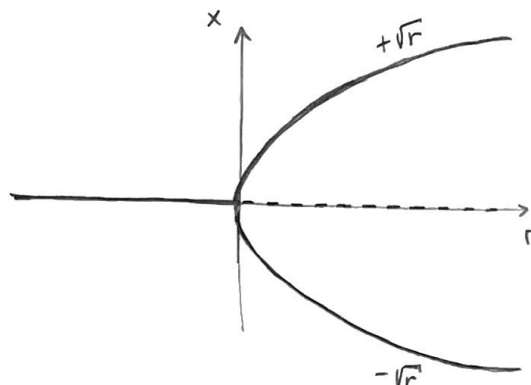
$$\dot{x} = rx \pm x^2$$



- BIFORCAZIONE A FORCONE
Tipica di problemi con simmetria.
I punti fissi tendono ad apparire e sparire come coppie simmetriche.
Invarianti per scambio $x \mapsto -x$

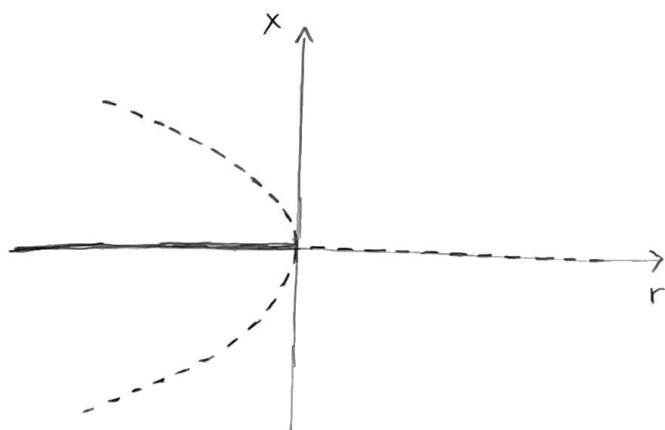
SUPERCITICA

$$\dot{x} = rx - x^3$$



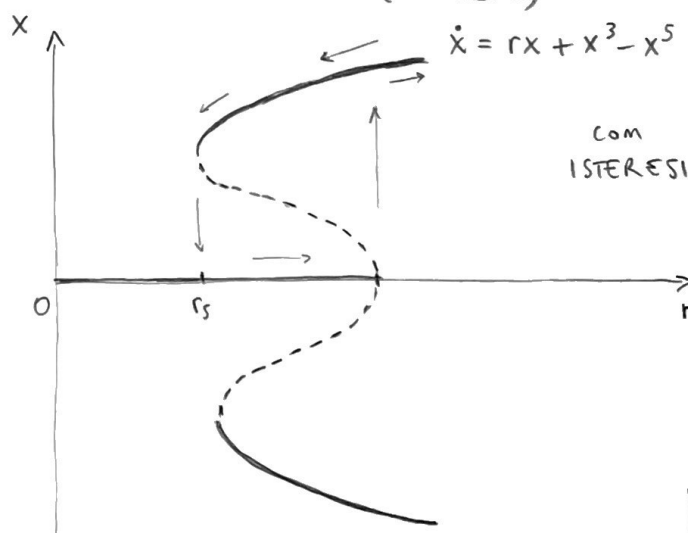
SUBCRITICA

$$\dot{x} = rx + x^3$$



SUBCRITICA (realista)

$$\dot{x} = rx + x^3 - x^5$$

con
ISTERESI

BIFORCAZIONI IMPERFETTE e CATASTROFI

Nella realtà la simmetria è spesso solo un'approssimazione come, per esempio, nel caso delle becchiette che tendono a piegarsi solo da un lato.

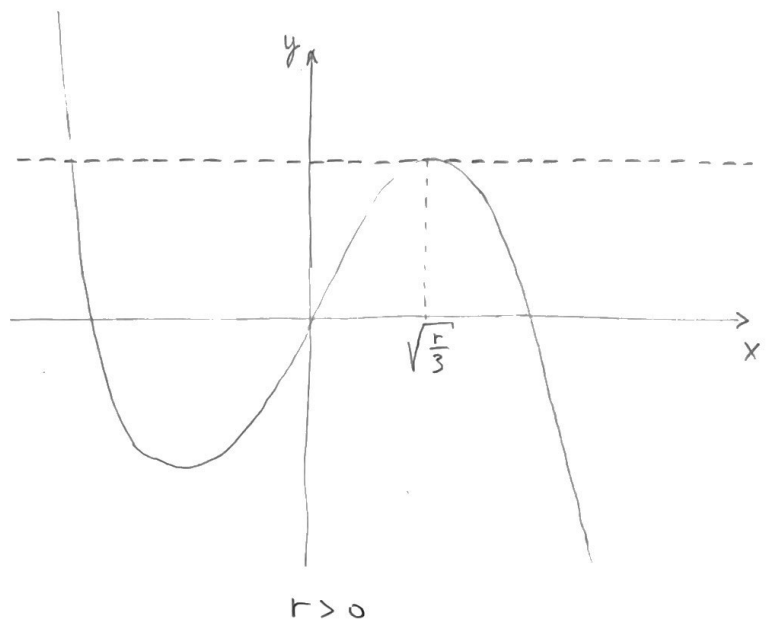
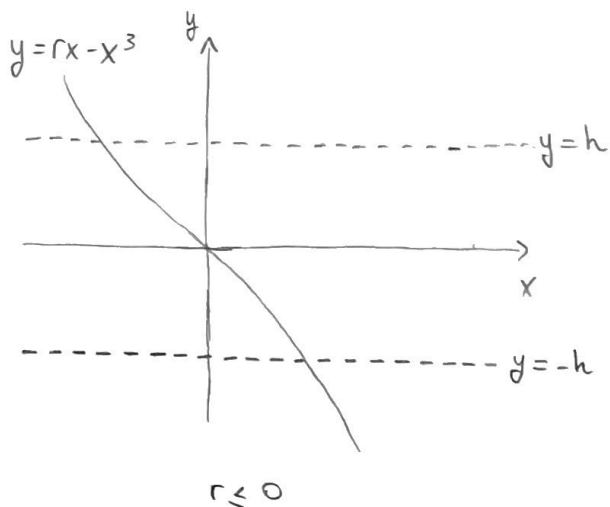
$$\dot{x} = h + rx - x^3$$

$h=0 \Rightarrow$ biforcazione a forcone supercritica
 h parametro d'imperfettione, rompe la simmetria $x \mapsto -x$.

Supponiamo di tenere r fisso e variare h . Usiamo il metodo grafico.

$$y = rx - x^3$$

$$y = -h$$



Per la retta tangente alle cubica,

$$\frac{d}{dx}(rx - x^3) = r - 3x^2 = 0 \Rightarrow x_{\max} = \sqrt{\frac{r}{3}}$$

$$\Rightarrow rx_{\max} - 3x_{\max}^3 = r\sqrt{\frac{r}{3}} - \frac{r}{3}\sqrt{\frac{r}{3}} = \frac{2r}{3}\sqrt{\frac{r}{3}} \quad \text{e} \quad x_{\min} = -\sqrt{\frac{r}{3}}$$

Quando $h = \pm h_c(r) = \pm \frac{2r}{3}\sqrt{\frac{r}{3}}$ si ha una biforcazione a nodo sella.

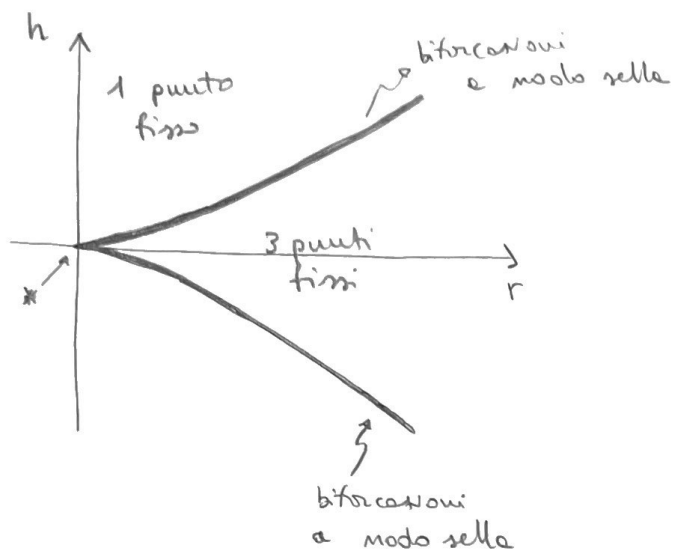
curve di biforcazione - DIAGRAMMA DI STABILITA'

* cuspidale: qui le curve si incontrano

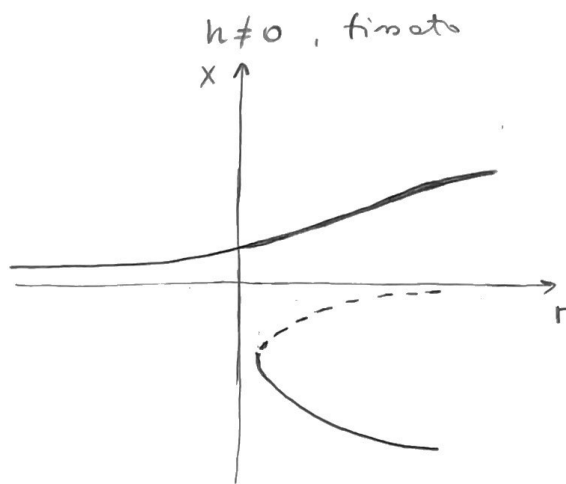
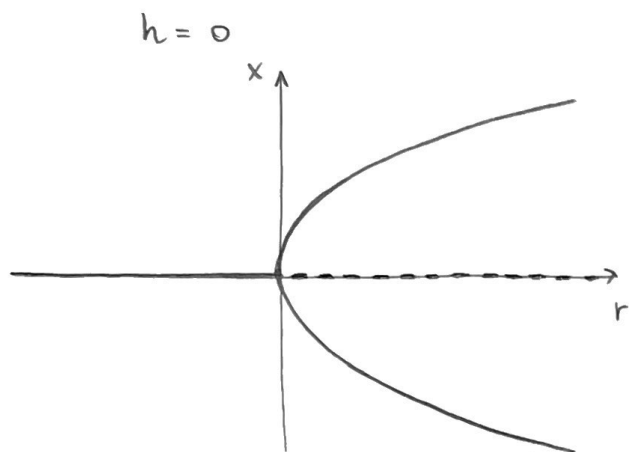
"tangenzialmente";

qui avviene una biforcazione di codimensione 2, in cui cioè bisogna variare 2 parametri, h e r , per ottenerla.

NOTA: Tutte le biforcazioni trattate finora avevano codimensione 1.



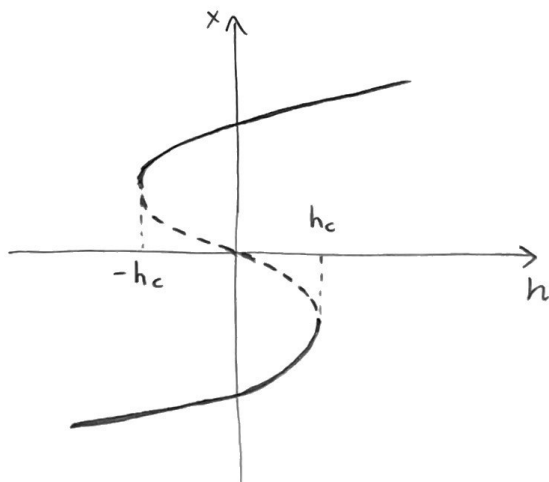
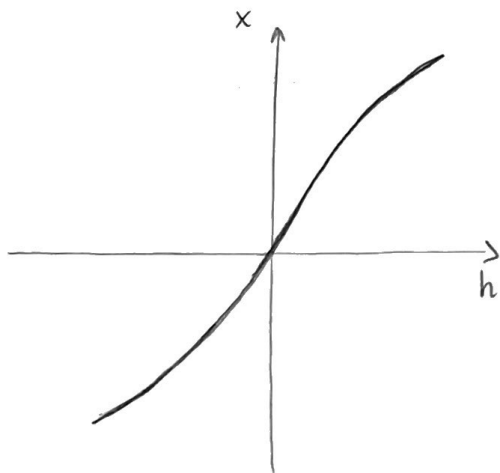
Il piano (h, r) è lo SPAZIO DEI PARAMETRI.



$$\dot{x} = h + rx - x^3;$$

$$x^* / h + rx^* - x^{*3} = 0; \quad h + x^*(r - x^{*2}) = 0, \quad \text{da risolvere per ottenere queste curve (h fisso)}$$

Inoltre occorre una perturbazione significativa per passare da un ramo all'altro



$r \leq 0$, fisso

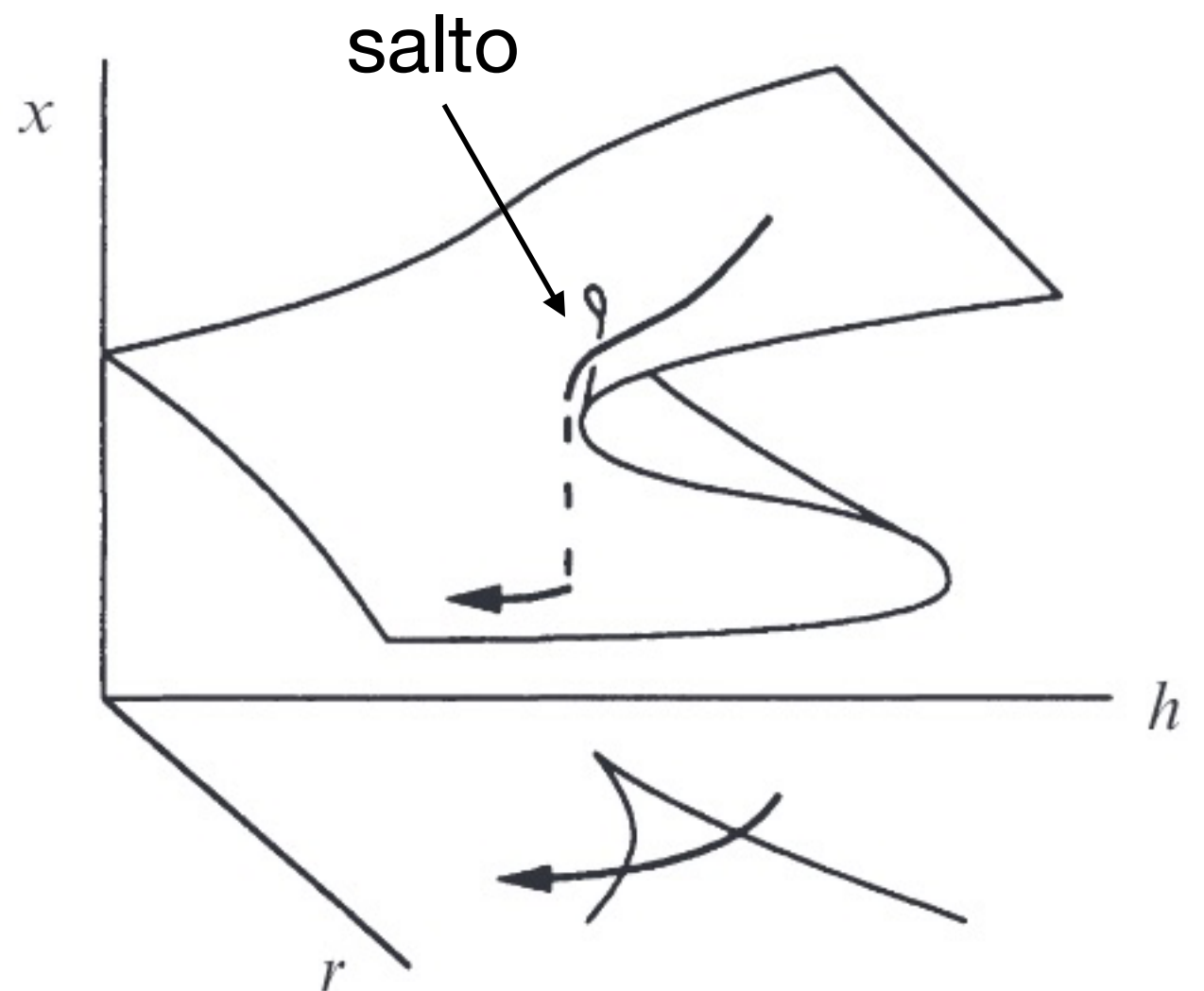
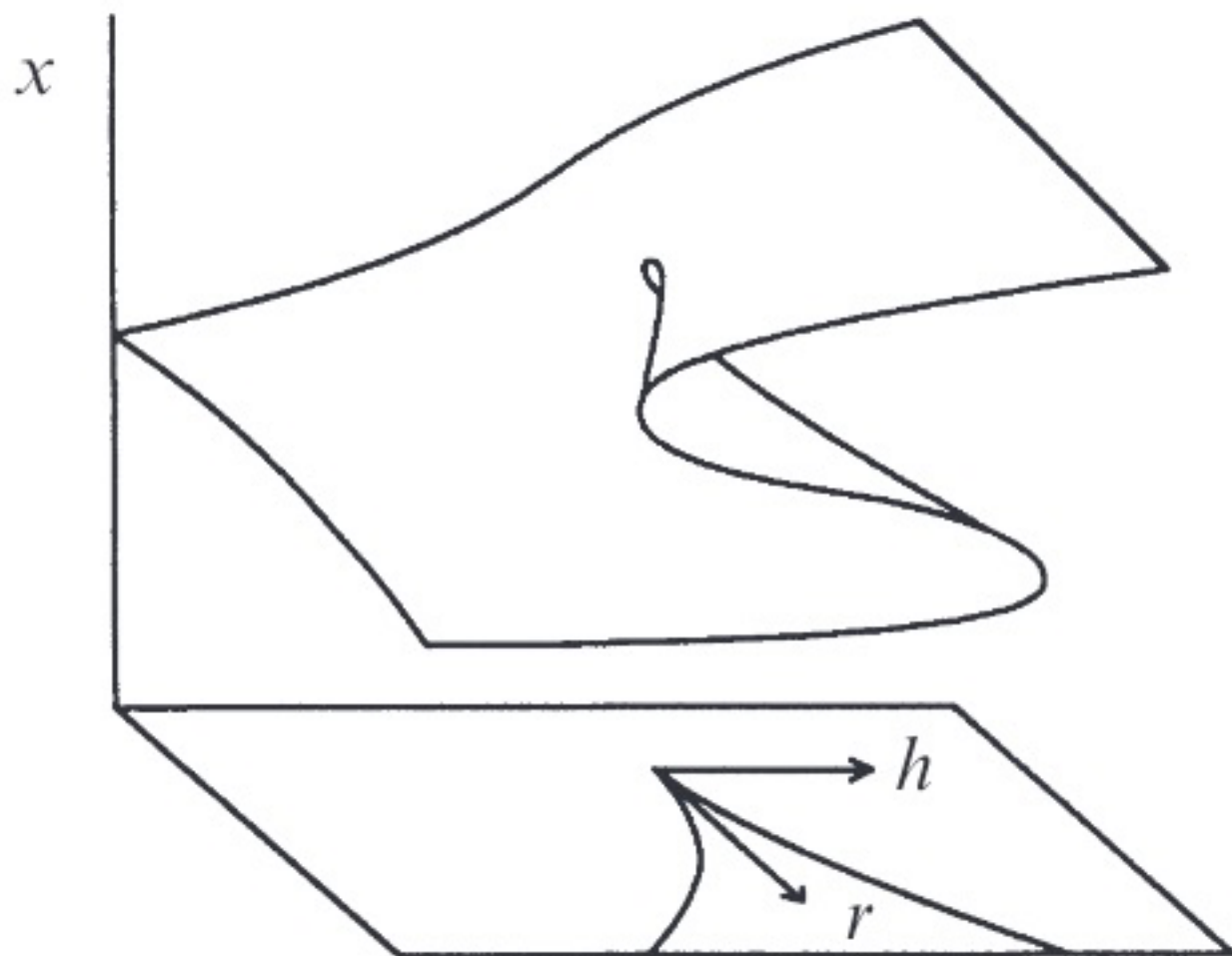
$r > 0$, fisso

→ seguenti grafici 3D da

73 del libro (catastrofe della cuspidale)

3.2

CATASTROFE DELLA CUSPIDE



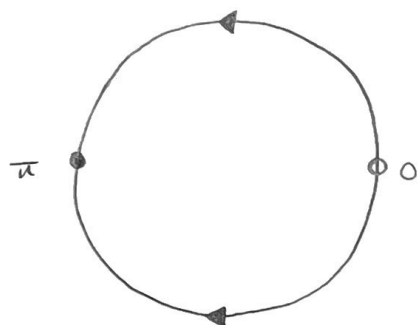
FLUSSI SU UNA CIRCONFERENZA (cap. 4 del libro)

$\dot{\theta} = f(\theta)$ corrisponde a un campo vettoriale su una circonferenza.
A differenza di $\dot{x} = f(x)$ qui le partielle può tornare al punto di partenza.

È il modello più basilico dei sistemi che oscillano.

ES. Campo vettoriale per $\dot{\theta} = \sin \theta$

$$\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \theta^* = 0, \theta^* = \pi$$



ES. $\dot{\theta} = \theta$

non può essere visto come un campo vettoriale su una circonferenza, poiché la velocità non è definita in maniera unica.

$$\theta = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = 0$$

$$\theta = 2\pi \Rightarrow \dot{\theta} = 2\pi$$

Se anche limitassimo θ a $-\pi < \theta \leq \pi$ avremmo comunque un salto discontinuo nel campo vettoriale della velocità.

oss. Non c'è nessun problema a vedere $\dot{\theta} = \theta$ come un campo vettoriale su una linea.

Def. (geometrica). Un campo vettoriale su una circonferenza è una regola che assegna una retta velocità unica ad ogni punto della circonferenza.

Questo è possibile quando $\dot{\theta} = f(\theta)$ con $f(\theta)$ funzione periodica di periodo 2π e valori reali, cioè $f(\theta + 2\pi) = f(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$.
Inoltre $f(\theta)$ deve essere abbastanza "liscia" (continua e con una derivata continua).

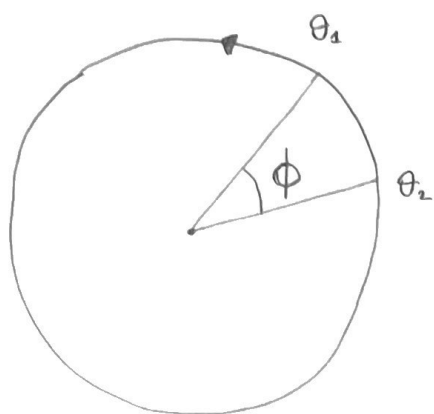
• OSCILLATORE UNIFORME

$$\dot{\theta} = \omega, \quad \theta(t) = \omega t + \theta_0, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ periodo}$$

oss. In questo sistema non c'è un'ampiezza, altrimenti saremmo in uno spazio delle fasi bi-dimensionale.

Qui si può considerare l'ampiezza come costante.

ES. Due corridori che partono insieme ma percorrono la circonferenza in T_1 e T_2 , rispettivamente.



$$\dot{\theta}_1 = \omega_1$$

quanto impiega θ_1 a

$$\dot{\theta}_2 = \omega_2$$

doppiare θ_2 ?

$$\omega_1 > \omega_2$$

Introduciamo la DIFFERENZA DI FASE

$$\phi = \theta_1 - \theta_2$$

$$\dot{\phi} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 = \omega_1 - \omega_2, \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{dt} dt = \int_0^{T_{dop}} (\omega_1 - \omega_2) dt$$

$$2\pi = (\omega_1 - \omega_2) T_{dop}$$

$\Rightarrow \phi$ aumenta di 2π (uno doppia l'altro) dopo un $T_{dop} = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$

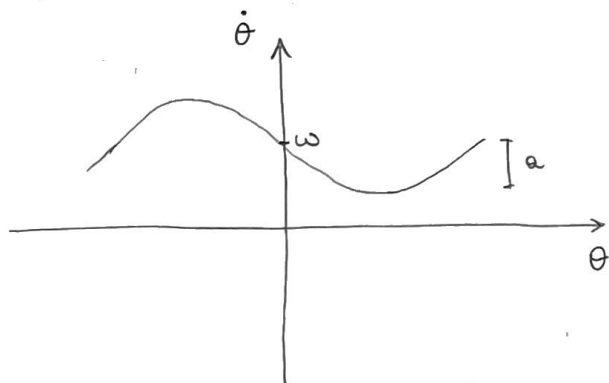
$\rightarrow$ battimenti tra due oscillatori non accoppiati.

• OSCILLATORE NON UNIFORME

$\dot{\theta} = \omega - a \sin \theta$, si applica a diversi fenomeni tra cui:

- neuroni oscillanti
- ritmo di accensione delle luci
- cicli sonno-veglia degli uomini
- giunzioni di Josephson
- onde di densità di carica
- pendolo smorzato forzato da una coppia costante

Assumiamo per semplicità che $\omega > 0$ e $a \geq 0$

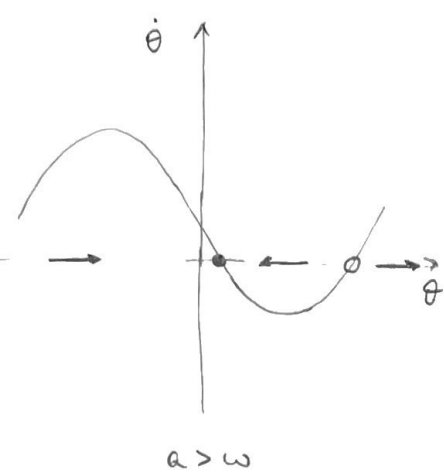
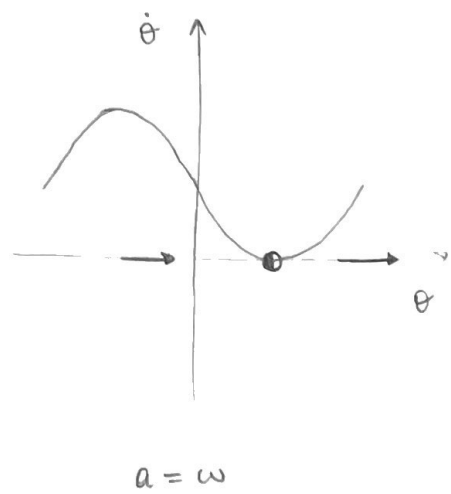
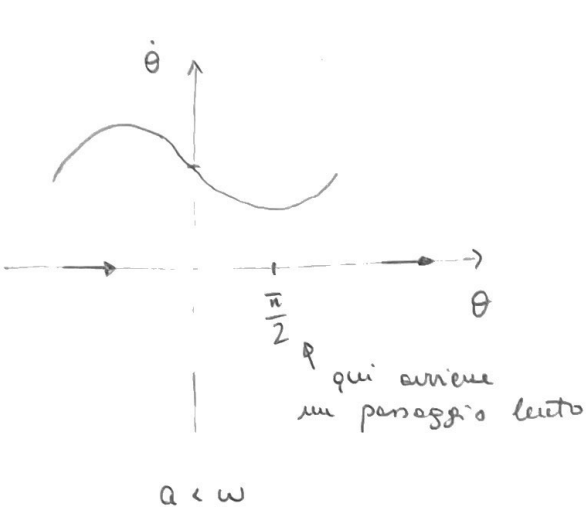


ω è la media

a è l'ampiezza

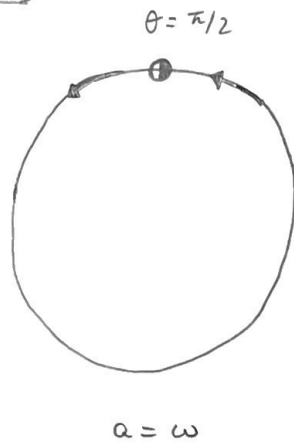
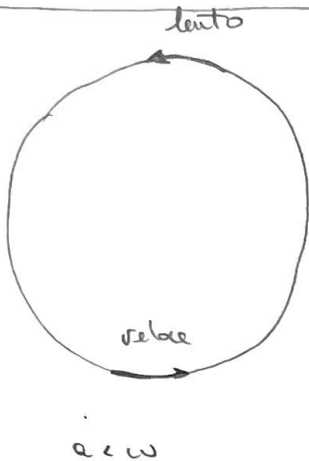
$a = 0 \Rightarrow$ oscillatore uniforme

$a \neq 0$ introduce una non uniformità lungo la circonferenza: la velocità è massima a $\theta = -\frac{\pi}{2}$ e minima a $\theta = \frac{\pi}{2}$



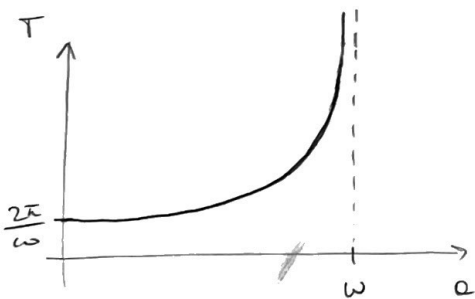
ESERCIZIO PER CASA

Studiare la stabilità dei punti fissi usando l'analisi di stabilità lineare



Periodo d'oscillazione

$$a < w, \quad T = \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{w - a \sin \theta} \quad \dots = \frac{2\pi}{\sqrt{w^2 - a^2}}$$



$$a = 0 \text{ allora } T = \frac{2\pi}{w}$$

Il periodo aumenta con a e diverge per $a \rightarrow w^-$

Stimiamo l'ordine di divergenza

$$\sqrt{w^2 - a^2} = \sqrt{w+a} \sqrt{w-a} \approx \sqrt{2w} \sqrt{w-a}$$

$$\Rightarrow T \approx \left(\frac{\pi \sqrt{2}}{\sqrt{w}} \right) \frac{1}{\sqrt{w-a}}, \quad T \sim (a_c - a)^{-1/2}$$

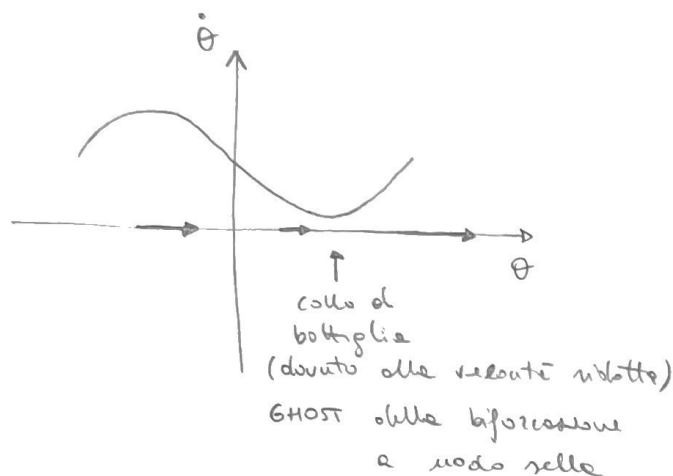
$$a_c = w$$

LEGGE DI SCALA
con l'INVERSO della
RADICE QUADRATA

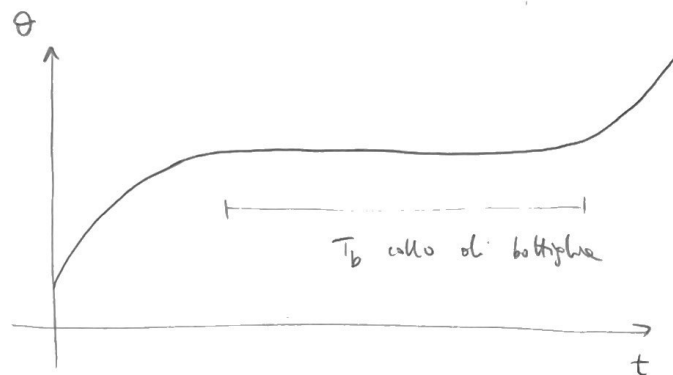
NOTA: Queste legge ^{di scala} $\sqrt{}$ è una CARATTERISTICA GENERALE dei sistemi che si trovano in prossimità di una biforcazione a nodo sella.

Quota caratteristica è dovuta al fantasma (GHOST) della biforcazione a nodo sella.

Partendo da $a > \omega$ e diminuendo a fino a $a < \omega$



I punti fissi si uniscono e poi scompaiono ma resta un collo di bottiglia (velocità ridotta) come fantasma della biforcazione.

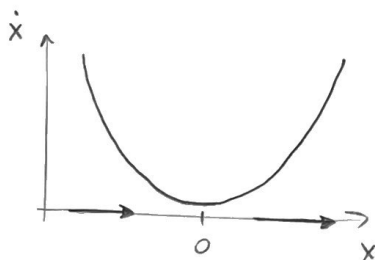


Deriviamo ora una legge generale per il tempo trascorso a passare attraverso il collo di bottiglia.

$\dot{\theta}(\theta)$ può essere approssimata da una parabola, in prossimità del suo minimo.

$\Rightarrow \dot{x} = r + x^2$, dove r è proporzionale alla distanza della biforcazione con $0 < r \ll 1$ al collo di bottiglia (era il nostro $a_c - a$)

$\uparrow$
biforcazione a nodo sella



Stimiamo così il tempo speso nel collo di bottiglia

$$T_b \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{r+x^2} = \frac{\pi}{\sqrt{r}} \quad \checkmark$$

LEGGE DI SCALA
con l'INVERSO della RADICE QUADRATA

- Seguono:
- diapositive sul modello di Kuramoto e le lezioni di P. Mauro.
 - diapositive sui reticoli di spin in idrodinamica.
 - video "Sync or Swim"

ESERCIZIO per CASA

Stimare il periodo $T \approx \left(\frac{\pi \sqrt{2}}{\sqrt{\omega}} \right) \frac{1}{\sqrt{\omega - a}}$ di $\dot{\theta} = \omega - a \sin \theta$

nel limite $a \rightarrow \omega^-$ usando il metodo della forma normale
rispetto del risultato esatto.